OPERE MATEMATICHE

DI

FRANCESCO BRIOSCHI

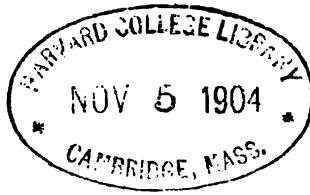
PUBBLICATE

PER CURA DEL *COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI*

(G. ASCOLI, V. CERRUTI, G. COLOMBO, L. CREMONA, G. NEGRI, G. SCHIAPARELLI).

TOMO TERZO.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1904

INDICE DEL TOMO III.

Pagine

XC. Studi sulle forme ternarie 1
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XV (1887-88), pp. 235-252.

XCI. Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado 21
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVI (1888-89), pp. 181-189.

XCII. Principii di una teoria sulla trasformazione delle equazioni algebriche . 31
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVI (1888-89), pp. 329-334.

XCIII. Felice Casorati 39
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVIII (1890), p. 264.

XCIV. Enrico Betti 41
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XX (1892), p. 256.

XCV. Sulla trasformazione dell'undecimo ordine delle funzioni ellittiche . . 43
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXI (1893), pp. 309-315.

XCVI. La trasformazione, d'ordine pari, delle funzioni ellittiche 51
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXII (1894), pp. 313-322.

XCVII. Nuove formole nella moltiplicazione e nella trasformazione delle funzioni ellittiche. 61
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIII (1895), pp. 73-91.

XCVIII. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche . . 81
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIV (1896), pp. 335-338.

IC. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di LAGRANGE 85
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIV (1896), pp. 339-346.

C. Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine 93
Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXVI (1897), pp. 255-259.

CI. Sul moto del calore nel globo della terra 99
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo I (1847), pp. 295-303.

CII. Dei criterj per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive . 109
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo III (1851), pp. 400-409.

CIII. Prefazione ad una memoria di G. PIOLA. 119
Memorie dell'Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, serie I, volume III (1852), pp. 283-298.

CIV. Sulla teoria dei covarianti. 137
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo VIII (1856), pp. 329-333.

CV. Sopra un'estensione del teorema di ABEL 143
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo VIII (1856), pp. 333-335.

CVI. Sugli integrali comuni a molti problemi di dinamica. 147
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo VIII (1856), pp. 413-418; tomo IX (1857), pp. 110-111.

CVII. Intorno ad un problema di statica razionale 157
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo IX (1857), pp. 104-109.

CVIII. Sulla linea di stringimento d'un sistema di linee a doppia curvatura . 163
Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, nuova serie, tomo IX (1857), pp. 400-404.

CIX. Sopra i covarianti delle forme a più variabili 169
Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, tomo I (1858), pp. 131-132.

CX. Sulla trasformazione delle equazioni algebriche. 171
Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, tomo I (1858), pp. 231-233.

CXI. Sul metodo di KRONECKER per la risoluzione delle equazioni di quinto grado 177
Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, tomo I (1858), pp. 275-282.

CXII. Rapporto sopra una memoria del generale GIOVANNI CAVALLI . . . 189
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 31-39.

CXIII. Sopra una nuova trasformazione dell'integrale ellittico. 196
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 46-48.

CXIV. Sopra una formola di JACOBI per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche 199
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 344-349.

CXV. Notizie biografiche sull'Ingegnere FRANCESCO COLOMBANI. 205
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume II (1865), pp. 51-65.

CXVI. Proprietà fondamentali di una classe di equazioni algebriche. . . . 217
Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, volume X (1867), pp. 1-21.

CXVII. Sopra le equazioni generali dell'ottavo grado che hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore corrispondente alla trasformazione di settimo ordine delle funzioni ellittiche 243
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume I (1868), pp. 68-72.

CXVIII. Sulla equazione che dà i punti di flesso delle curve ellittiche . . . 249
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume II (1869), pp. 559-565.

CXIX. Sopra talune equazioni differenziali ad integrale algebrico. 257
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume IX (1876), pp. 786-794; volume X (1877), pp. 48-57.

CXX. Di una nuova equazione differenziale nella teorica delle funzioni ellittiche. 277
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume X (1877), pp. 417-421.

CXXI. Un teorema nella teorica delle sostituzioni 283
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XII (1879), pp. 483-485.

CXXII. Sopra un problema d'analisi. 287
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XVII (1884), pp. 401-406.

CXXIII. Sulla trasformazione delle equazioni algebriche 293
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XX (1887), pp. 364-370.

CXXIV. Sopra un simbolo di operazione nella teorica delle forme. . . . 301
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XXII (1889), pp. 117-121.

CXXV. Un teorema nella divisione dei periodi delle funzioni ellittiche . . 307
Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XXVI (1893), pp. 727-731; volume XXVII (1894), pp. 186-193.

CXXVI. Intorno al movimento di un punto materiale sopra una superficie qualsivoglia 319
Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle scienze residente in Modena, tomo XXV, parte 2ª (1855), pp. 155-167.

CXXVII. Sui criterj di integrabilità delle funzioni, e sulle equazioni isoperimetriche 331
Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle scienze residente in Modena, tomo XXV, parte 2ª (1855), pp. 205-213.

CXXVIII. Sulla bisezione delle funzioni iperellittiche di prima specie, e sul problema geometrico corrispondente 339
Atti della R. Accademia dei Lincei, tomo XXIV (1870-71), pp. 47-48.

CXXIX. La determinazione analitica di alcune singolarità delle curve piane . 341
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, tomo II (1874-75), pp. XLIV-XLVI.

CXXX. Sulle condizioni per la decomposizione di una cubica in una conica ed in una retta 345
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 89-90.

CXXXI. Sulle condizioni che devono essere verificate dai parametri di una curva del quarto ordine perchè la medesima sia una conica ripetuta. 349
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 91-92.

CXXXII. Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica. 353
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 257-259.

CXXXIII. Sopra alcuni recenti risultati ottenuti dal sig. KLEIN nella risoluzione delle equazioni del quinto grado 357
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume I (1876-77), pp. 31-34.

CXXXIV. Su di alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche . . . 361
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume II (1877-78), pp. 115-118.

CXXXV. Sulla equazione modulare dell'ottavo grado 367
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume III (1878-79), pp. 45-47.

CXXXVI. Sulla equazione dell'ottaedro 371
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume III (1878-79), pp. 233-237.

CXXXVII. Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche 377
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume IV (1879-80), pp. 241-246.

CXXXVIII. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari 385
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VI (1881-82), pp. 42-47.

CXXXIX. Le relazioni algebriche fra le funzioni iperellittiche del primo ordine. 393
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VII (1882-83), pp. 137-140.

CXL. Sopra una classe di curve del 4° ordine 399
Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VIII (1883-84), pp. 164-168.

CXLI. Sulla trasformazione delle funzioni iperellittiche del primo ordine. 407
Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 315-318.

CXLII. Sopra una proprietà della ridotta dell'equazione modulare di ottavo grado 413
Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 514-516, 583-586.

CXLIII. Le equazioni modulari nella trasformazione del terzo ordine delle funzioni iperellittiche a due variabili 421
Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 769-771.

CXLIV. I nuovi moduli per le funzioni iperellittiche a due variabili 425
Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume II (1885-86), 1° sem., pp. 159-164.

Indice alfabetico dei nomi ricordati in questo volume 433

AVVERTENZA.

Per le 55 Memorie contenute in questo volume, i nomi dei revisori professori Bianchi (Pisa), Capelli (Napoli), Cerruti (Roma), Gerbaldi (Palermo), Loria (Genova), Pascal (Pavia), Pittarelli (Roma), Tonelli (Roma) sono rispettivamente indicati con le sigle [B.], [Ca.], [C.], [G.], [L.], [Pa.], [Pi.], [Tn.] apposte alla fine di ogni memoria.

Il lavoro di prima preparazione è stato nella massima parte eseguito dai professori Gerbaldi e Pascal, e quello di ultima revisione all'atto della tiratura nella sua totalità dal professore Gerbaldi.

XC.

STUDI SULLE FORME TERNARIE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XV (1887-88), pp. 235-252.

1. La teorica delle forme ternarie è rimasta pressochè stazionaria dopo che pei lavori di ARONHOLD, CLEBSCH, GORDAN, CAYLEY ed altri fu compiuto lo studio delle forme ternarie cubiche. Rispetto alle forme ternarie del quarto ordine furono bensì calcolati da JOUBERT e da SALMON alcuni covarianti e contravarianti, ma pel metodo stesso addottato si ottengono forme senza nesso apparente fra loro, mentre sono le relazioni fra gli invarianti ed i covarianti di una stessa forma che costituiscono la parte più importante di questa teorica.

In una comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi del 6 Aprile 1863 ho esteso il concetto di covariante associato alle forme ternarie, ma solo in vista di dedurne alcune conseguenze rispetto alle ternarie cubiche *). Ritornando ora sopra quel concetto espongo nelle pagine seguenti un metodo per la determinazione dei covarianti associati ad una forma ternaria dell'ennesimo ordine.

Sieno: $f(x_1, x_2, x_3)$ una forma ternaria dell'ennesimo ordine,

$$h(x_1, x_2, x_3) = \sum (\pm f_{11} f_{22} f_{33}),$$

*) *Application de la théorie des covariants au calcul intégral* (Extrait d'une lettre à M. HERMITE) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVI (1863), pp. 659-663]. In una mia Nota: *Sui covarianti delle forme a più variabili* [XLVIII: t. I, pp. 313-319] è fatto anche cenno di quella teoria pel caso di n variabili.

il suo hessiano d'ordine $3(n-2)$ e di grado 3°;

$$k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & h_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & h_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & h_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varkappa = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & f_1 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & f_2 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix},$$

due covarianti dello stesso ordine $2(4n-9)$ e dello stesso grado 8°. Sia infine

$$t = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

un covariante d'ordine $3(4n-9)$ e di grado 12°.

Porrò:

$$v_1 = \frac{\partial t}{\partial k_1}, \qquad v_2 = \frac{\partial t}{\partial k_2}, \qquad v_3 = \frac{\partial t}{\partial k_3},$$

$$u_1 = \frac{\partial k}{\partial h_1}, \qquad u_2 = \frac{\partial k}{\partial h_2}, \qquad u_3 = \frac{\partial k}{\partial h_3},$$

$$w_1 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_1}, \qquad w_2 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_2}, \qquad w_3 = \frac{\partial \varkappa}{\partial f_3},$$

nelle quali le derivate dei determinanti k, $\varkappa$, t si intendono rispetto alle h_1, h_2, h_3; f_1, f_2, f_3; k_1, k_2, k_3 che figurano nell'ultima linea. Si hanno così le

$$(1) \begin{cases} f_1v_1+f_2v_2+f_3v_3=0, & f_1u_1+f_2u_2+f_3u_3=-h^2, & f_1w_1+f_2w_2+f_3w_3=\varkappa, \\ h_1v_1+h_2v_2+h_3v_3=0, & h_1u_1+h_2u_2+h_3u_3=k, & h_1w_1+h_2w_2+h_3w_3=-fQ, \\ k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=t, & k_1u_1+k_2u_2+k_3u_3=R, & k_1w_1+k_2w_2+k_3w_3=S, \end{cases}$$

essendo

$$Q = \sum(\pm h_{11}h_{22}h_{33}),$$

ed R, S nuovi covarianti. Nelle formole superiori, come nelle seguenti, sono $f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $f_{11} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, ...

2. Introdurremo per brevità il seguente algoritmo:

$$f_{r1}v_1 + f_{r2}v_2 + f_{r3}v_3 = [f_{r1}v_1],$$

e pei valori di $v_1, v_2, v_3; u_1, u_2, u_3; w_1, w_2, w_3$, si otterranno le seguenti relazioni:

$$(2)\begin{cases}[f_{11}\,v_1]=x_3u_2-x_2u_3, & [f_{21}\,v_1]=x_1u_3-x_3u_1, & [f_{31}\,v_1]=x_2u_1-x_1u_2,\\ [f_{11}\,u_1]=-hh_1, & [f_{21}\,u_1]=-hh_2, & [f_{31}\,u_1]=-hh_3,\\ [f_{11}w_1]=q_1, & [f_{21}w_1]=q_2, & [f_{31}w_1]=q_3,\end{cases}$$

così:

$$(3)\begin{cases}[h_{11}\,v_1]=x_2w_3-x_3w_2, & [h_{21}\,v_1]=x_3w_1-x_1w_3, & [h_{31}\,v_1]=x_1w_2-x_2w_1,\\ [h_{11}\,u_1]=p_1, & [h_{21}\,u_1]=p_2, & [h_{31}\,u_1]=p_3,\\ [h_{11}w_1]=-Qf_1, & [h_{21}w_1]=-Qf_2, & [h_{31}w_1]=-Qf_3,\end{cases}$$

nelle quali le nuove espressioni $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$ hanno la proprietà:

$$(4)\qquad x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=k, \qquad x_1q_1+x_2q_2+x_3q_3=\varkappa.$$

Rappresenteremo con f_{v^2} *) la espressione:

$$f_{11}v_1^2+f_{22}v_2^2+f_{33}v_3^2+2f_{23}v_2v_3+2f_{31}v_3v_1+2f_{12}v_1v_2,$$

ed analogamente con f_{v^3} la

$$f_{111}v_1^3+f_{222}v_2^3+\cdots+6f_{123}v_1v_2v_3,$$

e con $f_{vu}, f_{u^2}, \ldots$ ed in generale con $f_{v^ru^s}$ le espressioni della stessa specie. Ciò posto, osservando che per definizione:

$$u_2v_3-u_3v_2=kf_1+h^2h_1, \qquad u_3v_1-u_1v_3=kf_2+h^2h_2,$$
$$u_1v_2-u_2v_1=kf_3+h^2h_3,$$

dalle relazioni (2) si deducono le seguenti:

$$(5)\begin{cases}f_{v^2}=-(fk+h^3), & f_{u^2}=-hk, & f_{w^2}=q_1w_1+q_2w_2+q_3w_3\\ f_{uw}=fhQ, & f_{vw}=-P, & f_{vu}=0,\end{cases}$$

*) Questa notazione fu già adottata dal sig. GORDAN, *Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form* $f=x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1$ [Mathematische Annalen, t. XVII (1880), pp. 359-378].

essendo

$$(6) \qquad P = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

un nuovo covariante.

Analogamente dalle equazioni (3) si ottengono le

$$(7) \begin{cases} h_{v^2} = -(h\varkappa + f^2 Q), & h_{u^2} = p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3, & h_{w^2} = -Q\varkappa, \\ h_{uw} = h^2 Q, & h_{vw} = 0, & h_{vu} = -P, \end{cases}$$

ed in conseguenza:

$$(8) \begin{cases} q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 = -P, & p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = -P, \\ q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3 = fhQ, & p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 = h^2 Q. \end{cases}$$

Il covariante P dell'ordine $3(4n-9)$ e del grado 12°, cioè dello stesso ordine e grado del covariante t, può porsi sotto altre due differenti forme. Si ottiene la prima moltiplicando i determinanti h, P avendo riguardo alle (2) e si ha:

$$P = -\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},$$

si giunge alla seconda moltiplicando i determinanti Q, P e si ha:

$$(9) \qquad P = -\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix},$$

cioè le prime due (8).

3. Consideriamo in questo paragrafo alcune altre formole generali, le quali conducono alla ricerca di covarianti della forma f, od a relazioni fra covarianti di essa. Seguendo una notazione di Aronhold, si pongano:

$$(10) \begin{cases} A = (fh)^{11} = f_{22}h_{33} + f_{33}h_{22} - 2f_{23}h_{23}, & L = (fh)^{23} = f_{12}h_{13} + f_{13}h_{12} - f_{11}h_{23} - f_{23}h_{11}, \\ B = (fh)^{22} = f_{33}h_{11} + f_{11}h_{33} - 2f_{31}h_{31}, & M = (fh)^{31} = f_{23}h_{21} + f_{21}h_{23} - f_{22}h_{31} - f_{31}h_{22}, \\ C = (fh)^{33} = f_{11}h_{22} + f_{22}h_{11} - 2f_{12}h_{12}, & N = (fh)^{12} = f_{31}h_{32} + f_{32}h_{31} - f_{33}h_{12} - f_{12}h_{33}, \end{cases}$$

e si indichino con a, b, c, l, m, n; α, β, γ, λ, μ, ν le analoghe espressioni, divise per due, supponendo nelle prime $h = f$, nelle seconde $f = h$; per cui $a = f_{22}f_{33} - f_{23}^2$, $\alpha = h_{22}h_{33} - h_{23}^2$ e così per le altre.

Osserviamo dapprima che le quantità u_1, u_2, u_3; w_1, w_2, w_3 si possono esprimere come segue:

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = -(ah_1 + nh_2 + mh_3), & w_1 = -(\alpha f_1 + \nu f_2 + \mu f_3), \\ u_2 = -(nh_1 + bh_2 + lh_3), & w_2 = -(\nu f_1 + \beta f_2 + \lambda f_3), \\ u_3 = -(mh_1 + lh_2 + ch_3), & w_3 = -(\mu f_1 + \lambda f_2 + \gamma f_3). \end{cases}$$

Ora, posto

$$(12) \qquad I = ah_{11} + bh_{22} + ch_{33} + 2lh_{23} + 2mh_{31} + 2nh_{12},$$

dai valori di A, B, ... si deducono le seguenti:

$$(13) \quad \begin{cases} Af_{11} + Nf_{12} + Mf_{13} = -(ah_{11} + nh_{12} + mh_{13}) + I, \\ Af_{21} + Nf_{22} + Mf_{23} = -(ah_{21} + nh_{22} + mh_{23}), \\ Af_{31} + Nf_{32} + Mf_{33} = -(ah_{31} + nh_{32} + mh_{33}), \end{cases}$$

ed altre sei analoghe. Così, ponendo

$$(14) \qquad J = \alpha f_{11} + \beta f_{22} + \gamma f_{33} + 2\lambda f_{23} + 2\mu f_{31} + 2\nu f_{12},$$

si hanno le

$$Ah_{11} + Nh_{12} + Mh_{13} = -(\alpha f_{11} + \nu f_{12} + \mu f_{13}) + J,$$

$$Ah_{21} + Nh_{22} + Mh_{23} = -(\alpha f_{21} + \nu f_{22} + \mu f_{23}),$$

$$Ah_{31} + Nh_{32} + Mh_{33} = -(\alpha f_{31} + \nu f_{32} + \mu f_{33}),$$

ed altre sei analoghe.

Posto

$$G = \begin{vmatrix} A & N & M \\ N & B & L \\ M & L & C \end{vmatrix},$$

le prime nove relazioni, come le altre nove, conducono alla

$$G = IJ - hQ;$$

inoltre si ottengono per le u_1, u_2, u_3; w_1, w_2, w_3 le espressioni seguenti:

$$(15)\begin{cases} u_1 = Af_1 + Nf_2 + Mf_3 - Ix_1, & w_1 = Ah_1 + Nh_2 + Mh_3 - Jx_1, \\ u_2 = Nf_1 + Bf_2 + Lf_3 - Ix_2, & w_2 = Nh_1 + Bh_2 + Lh_3 - Jx_2, \\ u_3 = Mf_1 + Lf_2 + Cf_3 - Ix_3, & w_3 = Mh_1 + Lh_2 + Ch_3 - Jx_3. \end{cases}$$

Moltiplicando le prime tre per h_1, h_2, h_3 e sommandole; e così moltiplicando le altre tre per f_1, f_2, f_3 e sommandole, si hanno le

$$(16) \qquad k = \psi - hI, \qquad \varkappa = \psi - fJ,$$

essendo

$$\psi = Af_1h_1 + Bf_2h_2 + Cf_3h_3 + L(f_2h_3 + f_3h_2) + M(f_3h_1 + f_1h_3) + N(f_1h_2 + f_2h_1),$$

e quindi:

$$(17) \qquad \varkappa = k + hI - fJ.$$

Le quantità $a, b, \ldots$ come le altre della stessa specie hanno la proprietà indicata dalle tre relazioni:

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial n}{\partial x_2} + \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2} + \frac{\partial l}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial x_1} + \frac{\partial l}{\partial x_2} + \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0,$$

per le quali i covarianti I, J si possono esprimere come segue:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -(3n-7)I, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = -(n-1)J.$$

Fra le 18 quantità $A, B, \ldots; a, b, \ldots; \alpha, \beta, \ldots$, hanno luogo sei relazioni, le quali conducono a nuove espressioni delle $p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3$. Le sei relazioni sono le

$$(18)\begin{cases} BC - L^2 = Ih_{11} + Jf_{11} + 2l\lambda - b\gamma - c\beta, \\ CA - M^2 = Ih_{22} + Jf_{22} + 2m\mu - c\alpha - a\gamma, \\ AB - N^2 = Ih_{33} + Jf_{33} + 2n\nu - a\beta - b\alpha, \\ MN - AL = Ih_{23} + Jf_{23} + a\lambda + l\alpha - m\nu - n\mu, \\ NL - BM = Ih_{31} + Jf_{31} + b\mu + m\beta - n\lambda - l\nu, \\ LM - CN = Ih_{12} + Jf_{12} + c\nu + n\gamma - l\mu - m\lambda. \end{cases}$$

Da esse si deducono la

$$(BC - L^2)x_1 + (LM - CN)x_2 + (NL - BM)x_3 = Ih_1 + Jf_1$$
$$+ (2l\lambda - b\gamma - c\beta)x_1 + (c\nu + n\gamma - l\mu - m\lambda)x_2 + (b\mu + m\beta - n\lambda - l\nu)x_3,$$

ed altre due analoghe; ora provasi facilmente che

$$(2l\lambda - b\gamma - c\beta)x_1 + (c\nu + n\gamma - l\mu - m\lambda)x_2 + (b\mu + m\beta - n\lambda - l\nu)x_3$$
$$= - Jf_1 - q_1 = - Ih_1 - p_1,$$

e similmente per le altre due. Si avranno perciò le

$$(BC - L^2)x_1 + (LM - CN)x_2 + (NL - BM)x_3 = Ih_1 - q_1 = Jf_1 - p_1,$$

e le altre due analoghe; inoltre rimane dimostrato essere

$$(19)\quad q_1 = p_1 + Ih_1 - Jf_1, \quad q_2 = p_2 + Ih_2 - Jf_2, \quad q_3 = p_3 + Ih_3 - Jf_3,$$

per le quali:

$$(20)\quad \begin{cases} q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3 = f_{w^2} = h^2 Q - fIQ - J\varkappa, \\ p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_3 u_3 = h_{u^2} = fhQ - Ik - Jh^2, \end{cases}$$

e moltiplicando per x_1, x_2, x_3 si ha come sopra:

$$\varkappa = k + Ih - Jf.$$

Notiamo infine come per le (12), (13) si abbia:

$$Af_{11} + Bf_{22} + Cf_{33} + 2Lf_{23} + 2Mf_{31} + 2Nf_{12} = 2I,$$

ed analogamente:

$$Ah_{11} + Bh_{22} + Ch_{33} + 2Lh_{23} + 2Mh_{31} + 2Nh_{12} = 2J.$$

Le formole superiori conducono ad esprimere il quadrato del covariante P, in funzione razionale dei sei covarianti f, h, k, I, J, Q. Infatti, moltiplicando le due espressioni (6), (9) di P, si ha tosto:

$$(21)\quad \begin{cases} P^2 = k^3 + (2hI - fJ)k^2 + (h^2 I^2 + h^3 J - fhIJ + f^2 QI - 3fh^2 Q)k \\ \qquad + h^4 IJ - fh^3 J^2 + Q(2f^2 h^2 J - fh^3 I - h^5) - f^3 h Q^2. \end{cases}$$

È chiara la importanza di questa formola che estende alle forme ternarie d'ordine n una nota proprietà delle forme ternarie cubiche.

Così dal prodotto dei covarianti P, t si ottiene la

$$(22)\qquad Pt = (fk + h^3)S + (f^2 Q + h\varkappa)R + (fh^2 Q - k\varkappa)k,$$

alla quale può darsi la forma:

$$Pt = -Sf_{v^2} - Rh_{v^2} + k\sum(\pm v_1 u_2 w_3).$$

4. Però le formole generali per esprimere i quadrati od i prodotti di covarianti sono, come pel caso delle forme binarie, le seguenti:

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}
2f_1h_1 &= fh_{11} + hf_{11} - Cx_2^2 - Bx_3^2 + 2Lx_2x_3,\\
2f_2h_2 &= fh_{22} + hf_{22} - Ax_3^2 - Cx_1^2 + 2Mx_3x_1,\\
2f_3h_3 &= fh_{33} + hf_{33} - Bx_1^2 - Ax_2^2 + 2Nx_1x_2,\\
f_2h_3 + f_3h_2 &= fh_{23} + hf_{23} + Ax_2x_3 + Lx_1^2 - Mx_1x_2 - Nx_3x_1,\\
f_3h_1 + f_1h_3 &= fh_{31} + hf_{31} + Bx_3x_1 + Mx_2^2 - Nx_2x_3 - Lx_1x_2,\\
f_1h_2 + f_2h_1 &= fh_{12} + hf_{12} + Cx_1x_2 + Nx_3^2 - Lx_3x_1 - Mx_2x_3.
\end{aligned}\right.$$

Queste relazioni qui applicate alle forme f, h sussistono evidentemente per due forme ternarie qualsivogliano, purchè non lineari.

Da esse si ricavano le

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
v_1^2 &= fhA - f^2\alpha - h^2a - 2hu_1x_1 - 2fw_1x_1 + (k - fJ)x_1^2,\\
v_2v_3 &= fhL - f^2\lambda - h^2l - h(u_2x_3 + u_3x_2) - f(w_2x_3 + w_3x_2) + (k - fJ)x_2x_3,
\end{aligned}\right.$$

e le analoghe. Così:

$$u_1^2 = -h^2A + fh\alpha - ka + 2hw_1x_1 + hJx_1^2,$$

$$u_2u_3 = -h^2L + fh\lambda - kl + h(w_2x_3 + w_3x_2) + hJx_2x_3,$$

ed analoghe; e le

$$w_1^2 = -\varkappa\alpha + Q(ha - fA + 2u_1x_1 + Ix_1^2),$$

$$w_2w_3 = -\varkappa\lambda + Q(hl - fL + u_2x_3 + u_3x_2 + Ix_2x_3).$$

Infine:

$$2u_1w_1 = \psi A + (fQ - hJ)a + (h^2 - fI)\alpha - 2Ju_1x_1 - 2Iw_1x_1 - (IJ + hQ)x_1^2,$$

$$\begin{aligned}
u_2w_3 + u_3w_2 = \psi L &+ (fQ - hJ)l + (h^2 - fI)\lambda\\
&- J(u_2x_3 + u_3x_2) - I(w_2x_3 + w_3x_2) - (IJ + hQ)x_2x_3,
\end{aligned}$$

e simili. Posto

$$X = R^2 - 2hkS - hk^2 J,$$

$$Y = S^2 - 2QkR - Qk^2 I,$$

$$Z = 2RS + 2k(JR + IS) + k^2(IJ + hQ),$$

si deducono le

$$X + k(ak_1^2) - fh(\alpha k_1^2) + h^2(Ak_1^2) = 0,$$

$$Y - hQ(ak_1^2) + \varkappa(\alpha k_1^2) + fQ(Ak_1^2) = 0,$$

$$Z - (fQ - hJ)(ak_1^2) - (h^2 - fI)(\alpha k_1^2) - \psi(Ak_1^2) = 0,$$

nelle quali:

$$(ak_1^2) = ak_1^2 + bk_2^2 + ck_3^2 + 2lk_2k_3 + 2mk_3k_1 + 2nk_1k_2,$$

e così per (αk_1^2), (Ak_1^2).

Posto inoltre per brevità:

$$D = -(fk + h^3), \qquad E = -(h\varkappa + f^2 Q), \qquad F = -(k\varkappa - fh^2 Q),$$

ossia:

$$D = f_{v^2} = \sum(\pm x_1 v_2 u_3), \quad E = h_{v^2} = \sum(\pm x_1 w_2 v_3), \quad F = \sum(\pm v_1 u_2 w_3),$$

si avranno le tre seguenti:

$$(25) \qquad \begin{cases} P^2(ak_1^2) = (F + EI)X + hDY + hEZ, \\ P^2(\alpha k_1^2) = QEX + (F + DJ)Y + QDZ, \\ P^2(Ak_1^2) = (EJ - DQ)X + (DI - Eh)Y - FZ. \end{cases}$$

Da ultimo notando essere

$$(26) \qquad \begin{cases} P^2 f = (F + EI)D - hE^2, \\ P^2 h = (F + DJ)E - QD^2, \\ P^2 \psi = (F + EI)(F + DJ) - hQDE, \end{cases}$$

si deduce dalla (22) la

$$t^2 = k^2(k - fJ) - 2k(hR + fS) - h^2(ak_1^2) - f^2(\alpha k_1^2) + fh(Ak_1^2),$$

espressione che può ottenersi anche direttamente dai valori superiori di v_1^2, v_2^2, ...

I quattro determinanti P, D, E, F conducono alle relazioni

$$Fx_1 = Pv_1 + Eu_1 + Dw_1, \qquad Fx_2 = Pv_2 + Eu_2 + Dw_2$$

$$Fx_3 = Pv_3 + Eu_3 + Dw_3,$$

da cui:

$$Fk = Pt + ER + DS,$$

come dalla formola (22).

5. Se dai valori di f_{v^2}, f_{vu}, f_{u^2}, ... trovati sopra si vuol passare alla ricerca di quelli di polari d'ordine superiore, si rende evidentemente necessaria la determinazione dei valori delle quattro espressioni seguenti:

$$\varphi_1 = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \qquad \varepsilon_1 = v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3},$$

$$\psi_1 = u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \qquad \eta_1 = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3},$$

e delle analoghe φ_2, ψ_2, ...

Ora si trova facilmente essere

$$(27) \quad \varphi_1 = 4(n-2)\psi x_1 - (n-1)h(u_1 + Ix_1) - (3n-7)f(w_1 + Jx_1),$$

e similmente per φ_2, φ_3; espressioni che possono prendere altra forma per le (15). Supponiamo

$$f_{v^r} = \Delta,$$

essendo Δ una funzione nota di covarianti di f; si avrà:

$$(n-r)f_{v^{r+1}} = v_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} - \left(\varphi_1 \frac{\partial f_{v^r}}{\partial v_1} + \varphi_2 \frac{\partial f_{v^r}}{\partial v_2} + \varphi_3 \frac{\partial f_{v^r}}{\partial v_3} \right).$$

Se $r = 2$, si ha $\Delta = -(fk + h^3)$, quindi:

$$v_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = -2(4n-9)ft,$$

e per le (2) e (27):

$$\varphi_1 \frac{\partial f_{v^2}}{\partial v_1} + \varphi_2 \frac{\partial f_{v^2}}{\partial v_2} + \varphi_3 \frac{\partial f_{v^2}}{\partial v_3} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 2(3n-7)fP,$$

si avrà perciò:

(28) $$(n-2)f_{v^3} = -2f[(4n-9)t + (3n-7)P].$$

Così, essendo

(29) $$\begin{cases} \psi_1 = (3n-7)(f_2 p_3 - f_3 p_2), \quad \psi_2 = (3n-7)(f_3 p_1 - f_1 p_3), \\ \psi_3 = (3n-7)(f_1 p_2 - f_2 p_1), \end{cases}$$

si giungerà alla

(30) $$(n-2)f_{v^2u} = -2(n-2)h^2 k - 2f[(4n-9)R - (3n-7)h_{u^2}],$$

nella quale deve porsi per h_{u^2} il suo valore (20).

I valori di ε_1, ε_2, ε_3 si trovano essere

(31) $$\varepsilon_1 = -2(4n-9)(f_2 k_3 - f_3 k_2) + (3n-7)(f_2 p_3 - f_3 p_2) - (3n-7)Iv_1,$$

ed analoghe; per ciò, partendo dalla $f_{u^2} = -hk$, si giunge alla

(32) $$(n-2)f_{u^2v} = 2h[(4n-9)t + (3n-7)P],$$

da cui, rammentando la (28), si deduce essere:

$$hf_{v^3} + ff_{u^2v} = 0.$$

Infine, essendo

(33) $$\eta_1 = -2(4n-9)(ak_1 + nk_2 + mk_3) + (3n-7)(ap_1 + np_2 + mp_3),$$

e simili per η_2, η_3, si ottiene la

(34) $$(n-2)f_{u^3} = -3(n-2)k^2 + 2h[(4n-9)R - (3n-7)h_{u^2}],$$

e per la (30):

$$hf_{v^2u} + ff_{u^3} = -k(3fk + 2h^3).$$

Notiamo nell'uso delle formole (33) le relazioni:

$$ap_1 + np_2 + mp_3 = hJx_1 + Iu_1 + hw_1,$$

e simili; come anche le

$$Dq_1 = Ff_1 + Ehh_1 - P(x_3 u_2 - x_2 u_3),$$

$$Ep_1 = Fh_1 + DQf_1 - P(x_2 w_3 - x_3 w_2),$$

$$Dk_1 = (hR - k^2)f_1 - (fR + h^2 k)h_1 + t(x_3 u_2 - x_2 u_3).$$

Si ottengono così, posto $[f_1 \varphi_1] = f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + f_3\varphi_3$, le seguenti:

$$[f_1\varphi_1] = -(n-1)D, \qquad [h_1\varphi_1] = -(3n-7)E,$$
$$[p_1\varphi_1] = -4(n-2)F - (n-1)DJ,$$
$$[k_1\varphi_1] = (n-1)(k^2 - hR) + (3n-7)(k\varkappa - fS),$$
$$[f_1\psi_1] = 0, \qquad [h_1\psi_1] = (3n-7)P, \qquad [p_1\psi_1] = 0,$$
$$D[k_1\psi_1] = -(3n-7)[(fR + h^2k)P + (DI - Eh)t],$$

e le altre analoghe formate tutte coi covarianti fin quì considerati.

La ricerca dei valori di f_{v4}, f_{v3u}, ... dipende in molta parte dalle relazioni superiori. Infatti indicando con X, Y, Z, U i secondi membri delle equazioni (28), (30), (32), (34) divisi per $n-2$, si hanno evidentemente i seguenti valori:

$$(35)\begin{cases} (n-3)f_{v4} = \left[v_1\dfrac{\partial X}{\partial x_1}\right] - \left[\varphi_1\dfrac{\partial f_{v3}}{\partial v_1}\right], \quad (n-3)f_{u4} = \left[u_1\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\right] - \left[\eta_1\dfrac{\partial f_{u3}}{\partial u_1}\right], \\ (n-3)f_{v3u} = \left[u_1\dfrac{\partial X}{\partial x_1}\right] - \left[\psi_1\dfrac{\partial f_{v3}}{\partial v_1}\right] = \left[v_1\dfrac{\partial Y}{\partial x_1}\right] - \left[\varphi_1\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial v_1}\right] - \left[\varepsilon_1\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial u_1}\right], \\ (n-3)f_{vu3} = \left[v_1\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\right] - \left[\varepsilon_1\dfrac{\partial f_{u3}}{\partial u_1}\right] = \left[u_1\dfrac{\partial Z}{\partial x_1}\right] - \left[\psi_1\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial v_1}\right] - \left[\eta_1\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial u_1}\right], \\ (n-3)f_{v^2u^2} = \left[u_1\dfrac{\partial Y}{\partial x_1}\right] - \left[\psi_1\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial v_1}\right] - \left[\eta_1\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial u_1}\right] \\ \qquad = \left[v_1\dfrac{\partial Z}{\partial x_1}\right] - \left[\varphi_1\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial v_1}\right] - \left[\varepsilon_1\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial u_1}\right], \end{cases}$$

nei quali si è scritto per brevità:

$$\left[v_1\frac{\partial X}{\partial x_1}\right] = v_1\frac{\partial X}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial X}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial X}{\partial x_3},$$

e così per le altre espressioni. Ora dai valori di f_{v^2}, f_{vu}, f_{u^2} si deducono facilmente quelli che seguono:

$$(36)\begin{cases} (n-2)\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial u_1} = \dfrac{n-2}{3}\dfrac{\partial f_{v3}}{\partial v_1} \\ \qquad = (n-2)(kf_1 - h^2h_1) - 2(4n-9)fk_1 + 2(3n-7)fp_1, \\ (n-2)\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial v_1} = \dfrac{n-2}{3}\dfrac{\partial f_{u3}}{\partial u_1} \\ \qquad = -3(n-2)kh_1 + 2(4n-9)hk_1 - 2(3n-7)hp_1, \\ \dfrac{1}{2}(n-2)\dfrac{\partial f_{v^2u}}{\partial v_1} = \dfrac{1}{2}(n-2)\dfrac{\partial f_{vu^2}}{\partial u_1} \\ \qquad = -(f_{11}\varepsilon_1 + f_{12}\varepsilon_2 + f_{13}\varepsilon_3) - (3n-7)h(x_2w_3 - x_3w_2), \end{cases}$$

notando che alla espressione $[f_{11}\varepsilon_1]$ può darsi la forma:

$$[f_{11}\varepsilon_1] = x_2\eta_3 - x_3\eta_2 + (3n-7)I(x_2u_3 - x_3u_2).$$

6. Si indichino con a_{rs}, b_{rs}, c_{rs}, l_{rs}, m_{rs}, n_{rs} i secondi membri delle espressioni (10), nelle quali siasi posto f_r in luogo di f ed f_s invece di h; talchè per esempio:

$$a_{rs} = a_{sr} = f_{r22}f_{s33} + f_{r33}f_{s22} - 2f_{r23}f_{s23}.$$

Derivando le a, b, c, ... rispetto ad x_1, x_2, x_3 si hanno le

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = (n-2)(x_1a_{11} + x_2a_{12} + x_3a_{13}), \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = (n-2)(x_1a_{21} + x_2a_{22} + x_3a_{23}),$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_3} = (n-2)(x_1a_{31} + x_2a_{32} + x_3a_{33}),$$

ed analoghe, e quindi:

$$(37) \qquad 2a = x_1^2a_{11} + x_2^2a_{22} + x_3^2a_{33} + 2x_2x_3a_{23} + 2x_3x_1a_{31} + 2x_1x_2a_{12},$$

e così per b, c, ... n. Da queste sei equazioni, per una nota proprietà delle espressioni a_{rs}, b_{rs}, ... *), si deducono le sei seguenti:

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}gx_1^2 = aa_{11} + ba_{22} + ca_{33} + 2la_{23} + 2ma_{31} + 2na_{12} = (aa_{11}), \\ \frac{1}{2}gx_2^2 = (ab_{11}), \quad \frac{1}{2}gx_3^2 = (ac_{11}), \quad \frac{1}{2}gx_2x_3 = (al_{11}), \\ \frac{1}{2}gx_3x_1 = (am_{11}), \quad \frac{1}{2}gx_1x_2 = (an_{11}), \end{array} \right.$$

nelle quali g è un covariante di f dell'ordine $4(n-3)$ e di 4° grado, che si esprime colle a_{rs}, b_{rs}, ... in sei modi differenti, cioè:

$$g = a_{11}a_{11} + b_{11}a_{22} + c_{11}a_{33} + 2l_{11}a_{23} + 2m_{11}a_{31} + 2n_{11}a_{12} = (a_{11}a_{11}),$$

$$g = a_{22}b_{11} + b_{22}b_{22} + c_{22}b_{33} + 2l_{22}b_{23} + 2m_{22}b_{31} + 2n_{22}b_{12} = (a_{22}b_{11}),$$

$$g = (a_{33}c_{11}), \quad g = 2(a_{23}l_{11}), \quad g = 2(a_{31}m_{11}), \quad g = 2(a_{12}n_{11}).$$

Moltiplicando le equazioni superiori (38) per f_{11}, f_{22}, f_{33}, $2f_{23}$, $2f_{31}$, $2f_{12}$ e sommandole, si ottiene:

$$(39) \quad \frac{1}{2}gf = a(a_{11}f_{11}) + b(a_{22}f_{11}) + c(a_{33}f_{11}) + 2l(a_{23}f_{11}) + 2m(a_{31}f_{11}) + 2n(a_{12}f_{11}),$$

---

*) ARONHOLD, *Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LV (1858), pp. 97-191 (p. 114)].

essendo
$$(a_{rs}f_{11}) = a_{rs}f_{11} + b_{rs}f_{22} + c_{rs}f_{33} + 2l_{rs}f_{23} + 2m_{rs}f_{31} + 2n_{rs}f_{12}.$$

Le tre identità
$$b = af_{11} + nf_{12} + mf_{13}, \qquad 0 = nf_{11} + bf_{12} + lf_{13}, \qquad 0 = mf_{11} + lf_{12} + cf_{13},$$
derivate la prima rispetto ad x_1, la seconda rispetto ad x_2, la terza rispetto ad x_3 e sommate, rammentando essere $\frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial n}{\partial x_2} + \frac{\partial m}{\partial x_3} = 0$ e le analoghe, dànno:

$$(40) \quad 3b_1 = (af_{111}) = af_{111} + bf_{122} + cf_{133} + 2lf_{123} + 2mf_{131} + 2nf_{112},$$

e così:
$$3b_2 = (af_{211}), \qquad 3b_3 = (af_{311}).$$

Differenziando nuovamente rispetto ad x_1, x_2, x_3, si ottiene:
$$3(3n-7)b_{11} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{111}\right) + (n-3)(af_{1111});$$
ma:
$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{111}\right) = (n-2)[x_1(a_{11}f_{111}) + x_2(a_{12}f_{111}) + x_3(a_{13}f_{111})],$$
e siccome vedesi facilmente essere
$$(a_{rs}f_{i11}) = (a_{si}f_{r11}) = (a_{ir}f_{s11}),$$
si avrà:

$$(41) \quad \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{111}\right) = (n-2)[x_1(a_{11}f_{111}) + x_2(a_{11}f_{211}) + x_3(a_{11}f_{311})] = (n-2)(a_{11}f_{11});$$

ed analogamente:
$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{211}\right) = \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}f_{111}\right) = (n-2)(a_{12}f_{11}).$$

Si ha così in generale:
$$3(3n-7)b_{rs} = (n-2)(a_{rs}f_{11}) + (n-3)(af_{rs11}).$$

Pel caso di $n = 3$ sarà:
$$(a_{rs}f_{11}) = 6b_{rs},$$
e quindi si dedurrà dalle equazioni (12), (39):
$$I = \tfrac{1}{12}gf,$$
essendo g il noto invariante di quarto grado.

Per una forma ternaria dell'ordine n, si avrà:

(42) $$3(3n-7)I = \frac{1}{2}(n-2)gf + (n-3)\varphi,$$
essendo
$$\varphi = [a(af_{1111})],$$

un covariante dello stesso ordine e grado di I.

Si noti che per le equazioni identiche

$$h = af_{11} + nf_{12} + mf_{13} = nf_{21} + bf_{22} + lf_{23} = mf_{31} + lf_{32} + cf_{33},$$
si ha:
$$3h = (af_{11}),$$
da cui:
$$9(n-2)h_1 = \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{11}\right) + (n-2)(af_{111}),$$

quindi, osservando l'equazione (40), si avrà:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{11}\right) = 2(n-2)(af_{111}),$$
e da questa:
$$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}f_{11}\right) = (n-2)\left(\frac{\partial a}{\partial x_1}f_{111}\right) + 2(n-2)(n-3)(af_{1111}),$$

od infine per la (41):

(43) $$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}f_{11}\right) = (n-2)^2(a_{11}f_{11}) + 2(n-2)(n-3)(af_{1111}).$$

Analogamente si avrebbe:

$$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x_2}f_{11}\right) = (n-2)^2(a_{12}f_{11}) + 2(n-2)(n-3)(af_{2111}),$$

e così di seguito. Talchè, posto

$$a\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + c\frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} + 2l\frac{\partial^2 a}{\partial x_2 \partial x_3} + 2m\frac{\partial^2 a}{\partial x_3 \partial x_1} + 2n\frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x_2} = A_a,$$

e così A_b, A_c, ... sostituendo nelle derivate alla a le b, c, ..., si avrà pel covariante φ la espressione

$$2(n-2)(n-3)\varphi = (A_a f_{11}) - \frac{1}{2}(n-2)^2 gf.$$

La relazione superiore (43) si può ottenere anche dalle

$$x_1 \frac{\partial a_{r1}}{\partial x_s} + x_2 \frac{\partial a_{r2}}{\partial x_s} + x_3 \frac{\partial a_{r3}}{\partial x_s} = (n-3)[a_{rs} + (ff_{rs})^{11}],$$

le quali conducono alle

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} &= (n-2)[(n-2)a_{11} + (n-3)(ff_{11})^{11}], \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2} &= (n-2)[(n-2)b_{11} + (n-3)(ff_{11})^{22}], \end{aligned} \right.$$

e simili.

Posto

$$(45) \qquad j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial f_{111}} h_{111}\right),$$

si otterranno pel covariante j dell'ordine $6(n-3)$ e del $6°$ grado altrettante differenti espressioni quante pel covariante g. Indicando con A_{rs}, B_{rs}, ... le espressioni che si deducono dalle A, B, ... (10) ponendo in esse f_r, h_s in luogo di f, h; e con A_{sr}, B_{sr}, ... le analoghe, se si sostituiscono alle f, h le f_s, h_r; si avranno per j sei espressioni della forma:

$$j = a_{11}A_{11} + a_{22}B_{11} + a_{33}C_{11} + 2a_{23}L_{11} + 2a_{31}M_{11} + 2a_{12}N_{11}$$

$$+ A_{11}a_{11} + A_{22}b_{11} + A_{33}c_{11} + (A_{23} + A_{32})l_{11} + (A_{31} + A_{13})m_{11} + (A_{12} + A_{21})n_{11},$$

inoltre:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = (n-2)(x_1 A_{11} + x_2 A_{12} + x_3 A_{13}) + (3n-8)(x_1 A_{11} + x_2 A_{21} + x_3 A_{31}),$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = (n-2)(x_1 A_{21} + x_2 A_{22} + x_3 A_{23}) + (3n-8)(x_1 A_{12} + x_2 A_{22} + x_3 A_{32}),$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_3} = (n-2)(x_1 A_{31} + x_2 A_{32} + x_3 A_{33}) + (3n-8)(x_1 A_{13} + x_2 A_{23} + x_3 A_{33}),$$

ed analoghe, per le quali:

$$A = x_1^2 A_{11} + x_2^2 A_{22} + x_3^2 A_{33} + x_2 x_3 (A_{23} + A_{32}) + x_3 x_1 (A_{31} + A_{13})$$
$$+ x_1 x_2 (A_{12} + A_{21}).$$

Rammentando le (37), (38), si avrà quindi la

$$j x_1^2 = (A a_{11}) + 2(a A_{11}),$$

posto

$$(A a_{11}) = A a_{11} + B a_{22} + C a_{33} + 2 L a_{23} + 2 M a_{31} + 2 N a_{12},$$

$$(a A_{11}) = a A_{11} + b A_{22} + c A_{33} + l(A_{23} + A_{32}) + m(A_{31} + A_{13}) + n(A_{12} + A_{21}).$$

Sarà per queste e per le (38):

$$(46) \qquad \begin{cases} j f = [A(a_{11} f_{11})] + 2[a(A_{11} f_{11})], \\ g b = 2[a(a_{11} b_{11})]. \end{cases}$$

Ora le relazioni (44) dànno in primo luogo:

$$\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} b_{11}\right) = (n-2)[(n-2)(a_{11} b_{11}) + (n-3)(A f_{1111})],$$

dimostrasi facilmente di poi che

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x_r} b_{r11}\right) = (n-2)(A_{r1} f_{11}),$$

e per le medesime si avrà:

$$\frac{\partial^2 (a b_{11})}{\partial x_1^2} = (n-2)^2 (a_{11} b_{11}) + 2(n-2)(3n-8)(A_{11} f_{11}) + (n-2)(n-3)(A f_{1111}) + 3(n-3)(3n-8)(a b_{1111}),$$

ma per la (12)

$$(a b_{11}) = I,$$

dunque il secondo membro della equazione superiore è eguale a $\frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2}$.

Se $n = 3$, essendo $I = \frac{1}{12} g f$ come risulta dalla (42), si ha:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2} g f_{11},$$

e quindi:

$$\tfrac{1}{2} g f_{11} = (a_{11} b_{11}) + 2(A_{11} f_{11}),$$

e, rammentando essere $(a f_{11}) = 3 b$, si dedurrà dalle (46):

$$2[a(A_{11} f_{11})] = g b, \qquad [A(a_{11} f_{11})] = j f - g b;$$

ma in questo caso $(a_{rs} f_{11}) = 6 h_{rs}$, ed è in generale $(A h_{11}) = 2 J$, si avrà quindi:

$$J = \frac{1}{12}(jf - gh).$$

Pel caso di f forma ternaria dell'ordine n, il valore di I è dato dalla (42); operando come sopra ed osservando essere

$$(a f_1 g_1) = g h, \qquad [a(A f_{1111})] = [A(a f_{1111})],$$

si giunge alla

$$(47)\left\{\begin{array}{l} 18(3n-7)^2(3n-8)J = (n-2)[3(3n-7)(3n-8)jf - (n^2+6n-21)gh] \\ \quad -(n-3)[2(n-2)(4n-13)f(a g_{11}) + (5n-12)(5n-13)(a\varphi_{11})] \\ \quad + 3(n-3)(3n-7)\big\{2(2n-5)[a(Af_{1111})] + 3(3n-8)[a(a h_{1111})]\big\}. \end{array}\right.$$

7. È noto, pel lavoro di ARONHOLD sopra citato, che le espressioni a_{rs}, b_{rs}, ... oltre alle nove equazioni della forma

$$(f_1 f_s)^{r1} + (f_2 f_s)^{r2} + (f_3 f_s)^{r3} = 0,$$

soddisfano ad altre trenta deducibili dalla seguente

$$(48) \qquad a_{rs}(f_1 f_1)^{\lambda\mu} + b_{rs}(f_2 f_2)^{\lambda\mu} + \cdots + 2 n_{rs}(f_1 f_2)^{\lambda\mu} = 0,$$

nella quale uno almeno degli indici λ, μ sia differente da r, s. Sarà quindi:

$$a_{11} b_{11} + b_{11} b_{22} + c_{11} b_{33} + 2 l_{11} b_{23} + 2 m_{11} b_{31} + 2 n_{11} b_{12} = 0,$$

$$a_{11} c_{11} + b_{11} c_{22} + c_{11} c_{33} + 2 l_{11} c_{23} + 2 m_{11} c_{31} + 2 n_{11} c_{12} = 0,$$

e così di seguito.

Ritornando ora alla importante formola stabilita nel paragrafo precedente

$$(49) \qquad 3(3n-7) h_{rs} = (n-2)(a_{rs} f_{11}) + (n-3)(a f_{rs11}),$$

osserviamo come moltiplicando le h_{11}, h_{22}, ... per a_{11}, b_{11}, ... si giunga, per la (48) e pei valori di g dati nello stesso paragrafo, alla relazione

$$3(3n-7)(a_{11} h_{11}) = (n-2) g f_{11} + (n-3)[a(a_{11} f_{1111})],$$

ed analogamente:

$$3(3n-7)(a_{22} h_{11}) = (n-2) g f_{22} + (n-3)[a(a_{22} f_{1111})],$$

e simili. Queste moltiplicate per x_1^2, x_2^2, ... riconducono evidentemente alla (42);

moltiplicate per a, b, c, ... dànno per le (38) la

$$2[a(a_{11} h_{11})] = g h,$$

trovata nello stesso precedente paragrafo.

Moltiplicando infine le equazioni stesse per A, B, C, ... ed osservando che per la

$$j x_1^2 = (A a_{11}) + 2(a A_{11}),$$

dimostrata più addietro, si ha:

$$j h = [A(a_{11} h_{11})] + 2[a(A_{11} h_{11})],$$

che inoltre:

$$(A f_{11}) = 2I, \qquad (a f_{11}) = 3h,$$

si giunge alla

$$(50) \quad (n-2)(6jh - 2gI) = 6(3n-7)[a(A_{11} h_{11})] - 2(n-3)[a(a A_{11}) f_{1111}],$$

nella quale deve porsi per I il valore dato dalla (42).

Si noti che moltiplicando la (49) per A, B, ..., oppure per α, β, ..., essendo

$$(A h_{11}) = 2J, \qquad (\alpha h_{11}) = 3Q,$$

si ottengono le relazioni:

$$(51) \quad \begin{cases} 6(3n-7)J = (n-2)[A(a_{11} f_{11})] + (n-3)[A(a f_{1111})], \\ 9(3n-7)Q = (n-2)[\alpha(a_{11} f_{11})] + (n-3)[\alpha(a f_{1111})]. \end{cases}$$

Il covariante j introdotto nel precedente paragrafo può porsi sotto altra forma che importa qui rammentare. Posto

$$(a_{11} A_{11}) = a_{11} A_{11} + a_{22} B_{11} + a_{33} C_{11} + 2 a_{23} L_{11} + 2 a_{31} M_{11} + 2 a_{12} N_{11},$$

$$(n_{11} A_{12}) = n_{11} A_{12} + n_{22} B_{12} + n_{33} C_{12} + 2 n_{23} L_{12} + 2 n_{31} M_{12} + 2 n_{12} N_{12},$$

e così di seguito, si hanno le

$$j = (a_{11} A_{11}) + (n_{11} A_{12}) + (m_{11} A_{13}) = (n_{11} A_{21}) + (b_{11} A_{22}) + (l_{11} A_{23})$$
$$= (m_{11} A_{31}) + (l_{11} A_{32}) + (c_{11} A_{33}),$$

ed altre tre espressioni mutando le A_{rs}, B_{rs}, ... in A_{sr}, B_{sr}, ...

Nello stesso modo il covariante

$$\delta = \left(h_{111} \frac{\partial j}{\partial f_{111}}\right),$$

dell'ordine $8(n-3)$ e del grado 8°, può esprimersi coll'una o coll'altra delle forme:

$$\delta = 4[A_{11}A_{11} + A_{22}B_{11} + A_{33}C_{11} + (A_{23} + A_{32})L_{11} + \cdots] + (a_{11}\alpha_{11}) + (\alpha_{11}a_{11}),$$

posto

$$(a_{11}\alpha_{11}) = a_{11}\alpha_{11} + a_{22}\beta_{11} + a_{33}\gamma_{11} + 2a_{23}\lambda_{11} + 2a_{31}\mu_{11} + 2a_{12}\nu_{11},$$

oppure

$$\delta = (a_{11}\alpha_{11}) + (b_{11}\alpha_{22}) + (c_{11}\alpha_{33}) + 2(l_{11}\alpha_{23}) + 2(m_{11}\alpha_{31}) + 2(n_{11}\alpha_{12});$$

e si avranno sei espressioni della prima specie e le corrispondenti sei della seconda. Così sussisteranno per ciascuna espressione di δ altre cinque identicamente eguali a zero; sarà per esempio:

$$0 = 4[A_{11}A_{22} + A_{22}B_{22} + A_{33}C_{22} + (A_{23} + A_{32})L_{22} + \cdots] + (a_{11}\alpha_{22}) + (\alpha_{11}a_{22}),$$

e la corrispondente nell'altra forma. Moltiplicando la prima espressione di δ e le altre cinque, identicamente nulle, che da essa si deducono, ordinatamente per x_1^2, x_2^2, ... e sommando, si ottiene:

$$\delta x_1^2 = 4(AA_{11}) + (\alpha a_{11}) + (a\alpha_{11}),$$

e simili, e per esse:

$$\delta f = 4[A(A_{11}f_{11})] + [\alpha(a_{11}f_{11})] + [a(\alpha_{11}f_{11})],$$

la quale per la seconda delle (51) conduce alla

$$(n-2)\delta f - 9(3n-7)Q$$
$$= (n-2)\big\{4[A(A_{11}f_{11})] + [a(\alpha_{11}f_{11})]\big\} - (n-3)[\alpha(af_{1111})].$$

Altri due covarianti degli ordini $10(n-3)$, $12(n-3)$ e dei gradi 10° e 12° si ottengono sostituendo nella forma di j data nel precedente paragrafo, od anche nelle superiori, e nelle espressioni di g, le α_{rs}, β_{rs}, ... alle a_{rs}, b_{rs}, ... Denominando con ρ, σ questi covarianti, si avranno le

$$\rho x_1^2 = (A\alpha_{11}) + 2(\alpha A_{11}),$$

$$\tfrac{1}{2}\sigma x_1^2 = (\alpha\alpha_{11}),$$

e simili, le quali conducono a relazioni analoghe alle superiori. Per le forme del terzo ordine δ, ρ, σ sono eguali, salvo un coefficiente numerico, a g^2, gj, j^2.

Applicheremo in altro lavoro questi risultati alle forme ternarie del quarto ordine.

[Pl. G.].

XCI.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL QUINTO GRADO.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVI (1888-89), pp. 181-189.

1. Sia $f(x_1, x_2)$ una forma binaria del quinto ordine; è noto che essa ha tre covarianti p, q, r del terzo ordine e dei gradi 3°, 5°, 9°. Posto

$$l = \frac{1}{2}(ff)_4,$$

si hanno i primi due covarianti dalle

$$p = -\frac{1}{3}(fl)_2, \qquad q = (lp),$$

e supposto $m = \frac{1}{2}(pp)_2$ si ottiene il terzo $r = (mp)$.

I covarianti p, q, r sono legati da una equazione del terzo grado come ho dimostrato in altro lavoro *).

La forma f ha tre invarianti:

$$A = \frac{1}{2}(ll)_2, \qquad B = (lm)_2, \qquad C = \frac{1}{2}(mm)_2,$$

dei gradi 4°, 8°, 12°, inoltre l'invariante del 18° grado ed il discriminante Δ.

Indicando con x_0, x_1, ... x_4 le radici della equazione

$$f(x) = a_0 x^5 + 5 a_1 x^4 + 10 a_2 x^3 + \cdots + a_5 = 0,$$

*) *Sulle relazioni esistenti tra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria* [LXXXV, t. II, pp. 281-294].

si ha:

$$f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_4)=5^5 a_0^5 \Delta,$$

ed esprimendo Δ in funzione dei coefficienti a_0, a_1, ... si ottiene:

$$\Delta = 16(A^2 - 144B).$$

2. La trasformazione della equazione $f(x)=0$ per mezzo del covariante p, o per la formola

$$y=\frac{p(x)}{f'(x)},$$

è nota da molti anni per le ricerche del sig. HERMITE sull'invariante del 18° grado *). In questa Nota considero invece l'analoga trasformazione che può operarsi col covariante $q(x)$.

Indicando con x_r una qualsivoglia delle radici x_0, x_1, ... x_4, pongo:

$$\frac{1}{5}f'(x_r)=\alpha,\qquad \frac{1}{4.5}f''(x_r)=\beta,\qquad \frac{1}{3.4.5}f'''(x_r)=\gamma,\qquad \frac{1}{2.3.4.5}f^{\mathrm{iv}}(x_r)=\delta;$$

è noto:

1° che sostituendo nel primo coefficiente di un covariante ai coefficienti a_0, a_1, ... le $a_0=0$, $a_1=\alpha$, $a_2=\beta$, $a_3=\gamma$, $a_4=\delta$, $a_5=1$, si ottiene il valore di quel covariante per $x=x_r$;

2° che la stessa sostituzione eseguita in un invariante dà il valore di esso in funzione delle radici.

Per determinare il valore di $q(x_r)$ e quelli di A, B, C, pongasi:

$$l_0=3\beta^2-4\alpha\gamma,\qquad 2l_1=2\beta\gamma-3\alpha\delta,\qquad l_2=\alpha-4\beta\delta+3\gamma^2,$$

inoltre:

$$p_0=2\alpha\beta\gamma-\alpha^2\delta-\beta^3,$$

$$3p_1=\alpha\beta\delta+\alpha\gamma^2-\alpha^2-\beta^2\gamma,$$

$$3p_2=\alpha\gamma\delta+\beta^2\delta-\alpha\beta-\beta\gamma^2,$$

$$p_3=\alpha\gamma+2\beta\gamma\delta-\beta^2-\alpha\delta^2-\gamma^3,$$

$$m_0=p_0p_2-p_1^2,\qquad 2m_1=p_0p_3-p_1p_2,\qquad m_2=p_1p_3-p_2^2,$$

*) HERMITE, *Sur l'équation du 5ème degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXI (1865), pp. 877-882, 965-972, 1073-1081; t. LXII (1866), pp. 65-72, 157-162, 245-253, 715-722, 919-924, 959-966, 1054-1059, 1161-1167, 1213-1215].

e si avranno le

$$A = l_0 l_2 - l_1^2, \qquad B = l_0 m_2 - 2 l_1 m_1 + l_2 m_0, \qquad C = m_0 m_2 - m_1^2.$$

Il primo coefficiente del covariante q è

$$l_0 p_1 - l_1 p_0,$$

quindi sostituendo i valori superiori si ottiene:

$$6 q(x_r) = \alpha(3\beta^3\delta - 2\beta^2\gamma^2 - 16\alpha\beta\gamma\delta + 9\alpha^2\delta^2 + 6\alpha\beta^2 + 8\alpha\gamma^3 - 8\alpha^2\gamma),$$

la quale espressione dimostra la proprietà speciale al covariante q, cioè che

$$\frac{q(x_r)}{\alpha} = \frac{5 q(x_r)}{f'(x_r)}$$

è una funzione intiera di α, β, γ, δ del grado 10° rispetto alle radici.

Posto

$$y_r = 2\,\frac{q(x_r)}{\alpha},$$

si ha $\Sigma y_r = 0$, ossia è nullo il coefficiente del secondo termine nella trasformata in y. I coefficienti dei termini terzo, quarto, ecc. saranno dei gradi 20°, 30°, ... rispetto alle radici, cioè dei gradi 8°, 12°, 16°, 20° rispetto ai coefficienti della $f(x)$. Essi saranno quindi funzioni dei soli tre invarianti A, B, C.

Ricorrendo al metodo, che ho indicato in altra occasione *), si giunge facilmente alla calcolazione della trasformata in y, che è la seguente:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y^5 - 10 B y^3 + 40 C y^2 + 5\left(\tfrac{4}{3} A C + 5 B^2\right) y \\ & \quad + 4\left(\tfrac{1}{3} A B^2 + \tfrac{4}{9} A^2 C - 54 B C\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

la quale può scriversi anche così:

$$y(y^2 - 5B)^2 + 40 C(y^2 - 5B) + \tfrac{20}{3} A C y + 4\left(\tfrac{1}{3} A B^2 + \tfrac{4}{9} A^2 C - 4 B C\right) = 0.$$

3. Sia

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x - x_r},$$

*) *Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten* (Auszug aus einem Briefe an Herrn GORDAN in Erlangen) [Mathematische Annalen, t. XXIX (1887), pp. 327-330].

e si indichino con g_2, g_3, g gli invarianti ed il discriminante della biquadratica $\varphi(x)$; sarà come è noto:

$$g = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

$$\Pi \varphi'(x) = 4^4 a_0^4 g,$$

da cui:

$$(2) \qquad 16 \alpha g^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5 a_0} . \Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Gli invarianti g_2, g_3, come pure i covarianti di φ, possono esprimersi in funzione delle α, β, γ, δ, e si hanno le

$$g_2 = \frac{5}{6}(6\alpha - 15\beta\delta + 10\gamma^2),$$

$$g_3 = \frac{5^2}{4^2 . 3^3}(144\alpha\gamma + 180\beta\gamma\delta - 108\beta^2 - 135\alpha\delta^2 - 80\gamma^3).$$

Ora, pei valori superiori di l_0, l_1, l_2, essendo

$$4A = 12\alpha\beta^2 - 16\alpha^2\gamma + 32\beta^2\gamma^2 - 48\beta^3\delta + 76\alpha\beta\gamma\delta - 9\alpha^2\delta^2 - 48\alpha\gamma^3,$$

rammentando il valore di $q(x_r)$, si giunge alla relazione:

$$24 q(x_r) + A\alpha = -\frac{4 . 3^3}{5^2}\alpha^2 g_3,$$

da cui:

$$12 y_r + A = -\frac{4 . 3^3}{5^2}\alpha g_3,$$

od infine per la (2):

$$27\frac{g_3}{g^{\frac{1}{2}}} = -4\frac{\sqrt{5}}{\Delta^{\frac{1}{2}}}(12 y_r + A) = -z_r,$$

supposto $a_0 = 1$.

4. Per determinare quale funzione delle radici della equazione $\varphi(x) = 0$ sia la z_r, supponiamo $r = 0$, siano cioè x_1, x_2, x_3, x_4 le radici di quest'ultima equazione. È noto che, indicando con λ, μ, ν le tre espressioni di queste radici

$$\lambda = \frac{1}{12}[(x_1 - x_4)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)],$$

$$\mu = \frac{1}{12}[(x_1 - x_2)(x_4 - x_3) - (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)],$$

$$\nu = \frac{1}{12}[(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) - (x_1 - x_2)(x_4 - x_3)],$$

sono λ, μ, ν le radici della equazione

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Ora, scrivendo per brevità $(rs) = x_r - x_s$, ai valori di λ, μ, ν può darsi la forma:

$$\lambda = \frac{1}{12}(13)(32)\left[\frac{(14)}{(13)} + \frac{(24)}{(23)}\right], \qquad \mu = \frac{1}{12}(14)(43)\left[\frac{(12)}{(14)} + \frac{(32)}{(34)}\right],$$

$$\nu = \frac{1}{12}(12)(24)\left[\frac{(13)}{(12)} + \frac{(43)}{(42)}\right],$$

ed essendo $g_3 = 4\lambda\mu\nu$, si avrà

$$(3) \qquad z_0 = \left[\frac{(14)}{(13)} + \frac{(24)}{(23)}\right]\left[\frac{(12)}{(14)} + \frac{(32)}{(34)}\right]\left[\frac{(13)}{(12)} + \frac{(43)}{(42)}\right].$$

Queste cinque funzioni $z_0, z_1, \ldots z_4$ furono già indicate dal sig. KRONECKER in una sua comunicazione all'Accademia di Berlino, non peranco compiuta *).

Essendo

$$z_r = 4\frac{\sqrt{5}}{\Delta^{\frac{1}{2}}}(12y_r + A),$$

la calcolazione della equazione di cui le radici sono $z_0, z_1, \ldots z_4$ non presenta difficoltà, dipendendo dalla già calcolata (1) in y.

Posto $z_r = v_r\sqrt{5}$, si può dare all'equazione in v la forma seguente:

$$(v - P)^5 - 10(P^2 - 1)(v - P)^3 + 25(P^2 - 1)^2(v - P)$$
$$+ 16P(P^2 - 1)^2 + Q(5v^2 + 27) = 0,$$

nella quale:

$$P = 4\frac{A}{\Delta^{\frac{1}{2}}}, \qquad Q = 2.3^3.4^7\frac{C}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Il sig. HERMITE nelle Note sopra citate ha pure considerato una equazione della stessa specie. Indicando con f, g, h, l le quattro funzioni delle radici $x_0, x_1, \ldots$

$$f = (12)(34), \qquad g = (13)(42), \qquad h = (14)(23),$$

$$l = (01)(02)(03)(04),$$

*) KRONECKER, *Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variabeln* [Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, a. 1886, pp. 251-253].

egli pone:

$$\lambda_0 = (h - g)(g - f)(f - h)l,$$

e quindi sarà:

$$\lambda_r = 4 \cdot 5^3 (12 y_r + A) = 5^3 \Delta^{\frac{1}{2}} v_r .$$

5. Ritornando alla equazione (1) in y, supponiamo in essa $B = 0$, e posto

$$y = \frac{4}{3} \frac{A}{z^2 + 3}, \qquad I = -\frac{1}{3^6} \frac{A^3}{C},$$

nella seconda delle quali I ha l'ordinario valore, si deduce la

$$12^3 I = (z^2 + 3)^3 (z^4 + 11 z^2 + 64),$$

o la

$$12^3 (I - 1) = z^2 (z^4 + 10 z^2 + 45)^2,$$

cioè la nota forma normale delle equazioni del quinto grado. Una equazione del quinto grado, per la quale l'invariante $B = 0$, si trasforma quindi per le indicate sostituzioni nella

$$z^5 + 10 z^3 + 45 z + t = 0,$$

essendo

$$t = -24 \sqrt{3} \sqrt{I - 1}.$$

6. A questo risultato si può giungere in altro modo, il quale ha il vantaggio di stabilire la proprietà caratteristica delle forme binarie del quinto ordine di cui l'invariante $B = 0$.

Rammento, a questo scopo, alcune relazioni fra invarianti e covarianti di una quintica $f(x_1, x_2)$, relazioni l'esistenza delle quali è dimostrata nel mio scritto citato nel n° 1. Ai covarianti l, m, p ed agli invarianti A, B, C definiti nel medesimo n° aggiungo ora il covariante quadratico n ed i covarianti lineari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, così definiti:

$$n = (lm), \qquad \alpha = (lp)_2, \qquad \beta = (l\alpha), \qquad \gamma = (m\alpha), \qquad \delta = (n\alpha),$$

e l'invariante D del 18° grado:

$$D = (\alpha\delta) = (\gamma\beta).$$

Posto

$$L = 4(2AB - 27C), \qquad M = 4AC - B^2,$$

$$P = \tfrac{1}{2}BL - AM, \qquad Q = CL - \tfrac{1}{2}BM,$$

si ha:

$$D^2 = BLM - AM^2 - CL^2,$$

e le

$$D^2 l = L\delta^2 - 2P\delta\alpha - \tfrac{1}{4}LM\alpha^2, \qquad D^2 m = M\delta^2 - 2Q\delta\alpha - \tfrac{1}{4}M^2\alpha^2,$$

$$Mp = 4Cl\alpha - 2Bm\alpha + 2m\delta,$$

$$gMf = \alpha^3 l - 27\alpha m^2 + 8A\alpha lm - 2B\alpha l^2 + 2(27B - 8A^2)mp,$$

e fra i tre covarianti lineari α, γ, δ sussiste la relazione:

$$M\delta = Q\alpha - D\gamma.$$

Per quest'ultima relazione, i covarianti l, m e quindi p, f si possono esprimere in funzione dei covarianti lineari α, γ dei gradi 5°, 11° e si hanno le

$$M^2 l = -Q\alpha^2 + 2D\alpha\gamma + L\gamma^2, \qquad Mm = C\alpha^2 + \gamma^2,$$

e, supponendo $B = 0$, si ottengono facilmente le

$$4^3 A^3 C^3 p = 8.3^3 C^3\alpha^3 + 6CD\alpha^2\gamma - 8.3^4 C^2\alpha\gamma^2 - 2D\gamma^3,$$

$$3^2.4^3 A^3 C^5 f = 3^4.C^4\alpha^5 + 10.3^3 C^3\alpha^3\gamma^2 + 45.3^2 C^2\alpha\gamma^4 + 2D\gamma^5,$$

ossia, posto

(4)
$$\alpha = \eta_1, \qquad \gamma = \eta_2\sqrt{3C},$$

si avrà:

$$\frac{4^3}{3^2}A^3 Cf = \eta_1^5 + 10\eta_1^3\eta_2^2 + 45\eta_1\eta_2^4 - t\eta_2^5,$$

essendo

$$t = -\frac{2D}{3C\sqrt{3C}},$$

e quindi:

(5)
$$t^2 + 12^3 = -\frac{4^3}{3^3}\frac{A^3}{C},$$

come nel precedente n°.

Rimane così dimostrato che una forma binaria del quinto ordine, per la quale l'invariante $B = 0$, mediante la trasformazione (4) si riduce alla forma normale.

Il valore superiore di p per le stesse (4) diviene:

$$\frac{4^3}{3^3}A^3 p = 8\eta_1^3 - t\eta_1^2\eta_2 - 72\eta_1\eta_2^2 + t\eta_2^3,$$

ed indicando con ρ il covariante di quarto ordine e di quarto grado definito dalla relazione

$$4A\rho = 3lm - \alpha p,$$

si ottiene la

$$\frac{4^3}{3^3}A^4\rho = \eta_1^4 + 18\eta_1^2\eta_2^2 - t\eta_1\eta_2^3 - 27\eta_2^4.$$

Infine dal valore superiore di m si deduce:

$$4Am = \eta_1^2 + 3\eta_2^2.$$

Fra i covarianti f, ρ, p, m, α, γ sussistono le tre relazioni seguenti:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p\eta_2^2 = A\rho\eta_1 - 3Cf, \qquad 3Cf\eta_1 - A\rho\eta_2^2 = 3^3 m^3, \\ C(p\eta_1 - 8A\rho)^2 + 3^3 Cp^2\eta_2^2 = -3^3\eta_2^2 m^3, \end{array} \right.$$

e quindi, per le ultime due,

$$C(p\eta_1 - 8A\rho)^2 + 3^3 Cp^2\eta_2^2 + (3Cf\eta_1 - A\rho\eta_2^2)\eta_2^2 = 0,$$

e questa, per la prima delle superiori, conduce alla equazione quadratica in η_1:

$$P\eta_1^2 + 2Q\eta_1 + R = 0,$$

essendo

$$P = Cp^4 + 3ACfp\rho - A^3\rho^3,$$

$$2Q = C(11Ap^3\rho - 9Cf^2p + 6A^2f\rho^2),$$

$$R = C(64A^2p^2\rho^2 - 81Cp^3f - 9ACf^2\rho).$$

I covarianti lineari α, γ od η_1, η_2 si possono quindi determinare in funzione di f, ρ, p, A, C per la risoluzione di equazioni quadratiche. Posto

$$4a = 3C^3(Ap^2\rho - 3Cf^2),$$

$$4^3 \cdot 3^2 b = C^5(4A^2\rho^2 - 9Cfp)(9Cp^4 - 16A^3\rho^3 + 24ACfp\rho),$$

ossia a, b gli invarianti di quarto e di ottavo grado della quintica

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 5\mu v + \nu = 0,$$

nella quale:

$$2\lambda = -Cp, \qquad \mu = AC\rho, \qquad \nu = -3C^2f,$$

si ha:

$$4C^4(Q^2 - PR) = 16p^2(a^2 - 144b) = p^2\nabla,$$

e quindi:

$$\eta_1 = \frac{44\lambda^3\mu - \lambda\nu^2 + \mu^2\nu \pm \lambda\nabla^{\frac{1}{2}}}{16\lambda^4 - \mu^3 + 2\lambda\mu\nu},$$

ed il valore di η_2 si otterrà dalla

$$2\lambda\eta_2^2 + \mu\eta_1 + \nu = 0.$$

È noto *) che una radice qualunque v_r dell'equazione superiore si esprime in funzione di η_1, η_2 e della corrispondente radice ζ_r della equazione normale nel modo seguente:

$$v_r = -\frac{\eta_1 + \eta_2\zeta_r}{\zeta_r^2 + 3},$$

le radici v_r sono quindi note quando sia determinato il valore del coefficiente t dell'equazione suindicata in funzione dei coefficienti λ, μ, ν. Ora dalle prime due relazioni (6) si deducono le

$$2\lambda\eta_1^2 - 3\mu\eta_1 - 3\nu = 8A\lambda m,$$

$$\mu\eta_2^2 + \nu\eta_1 = -3^3 C m^3,$$

quindi per la (5) si avrà:

$$12^3 I = \frac{(2\lambda\eta_1^2 - 3\mu\eta_1 - 3\nu)^3}{8\lambda^3(\mu\eta_2^2 + \nu\eta_1)}.$$

7. Il prof. GORDAN ha dimostrato che una equazione qualsivoglia del quinto grado $f(x) = 0$, mediante la sostituzione **)

$$v = \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\psi(x),$$

nella quale $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono polinomi in x del secondo e del quarto grado che sodisfano le

$$\sum\varphi(x) = 0, \qquad \sum\psi(x) = 0,$$

$$\sum\varphi^2(x) = 0, \qquad \sum\varphi(x)\psi(x) = 0, \qquad \sum\psi^2(x) = 0,$$

si trasforma nella

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 5\mu v + \nu = 0,$$

e quindi saranno λ, μ, ν forme binarie in λ_1, λ_2 degli ordini 3°, 4°, 5°.

---

*) KIEPERT, *Auflösung der Gleichungen fünften Grades* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXVII (1879), pp. 114-133].—KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig, 1884), pag. 193.

**) GORDAN, *Ueber Gleichungen fünften Grades* [Mathematische Annalen, t. XXVIII (1887), pp. 152-166].

L'invariante B dell'ottavo grado della equazione superiore in v ha la proprietà di decomporsi in due fattori; infatti trovasi facilmente essere

$$18B = (2\mu^2 - 3\lambda\nu)(9\lambda^4 - \mu^3 + \lambda\mu\nu),$$

e perciò sarà $B = 0$ quando sia

$$2\mu^2 - 3\lambda\nu = 0.$$

Indicando con k una indeterminata, questa è soddisfatta ponendo

$$\mu = 3\lambda k, \qquad \nu = 6\lambda k^2,$$

per le quali l'equazione in v diventa:

$$v^5 + 10\lambda v^2 + 15\lambda k v + 6\lambda k^2 = 0,$$

la quale facilmente si riconduce alla forma normale *).

La equazione $2\mu^2 - 3\lambda\nu = 0$ equivale alla

$$\left(\sum v^4\right)^2 - 4\sum v^3 . \sum v^5 = 0,$$

conduce cioè ad una equazione dell'ottavo grado in $\lambda_1 : \lambda_2$.

Ottobre 1888.

[L.], [Pa.].

*) GORDAN, *Sur les équations du cinquième degré* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. IV, t. I (1885), pp. 455-458].

XCII.

PRINCIPII DI UNA TEORIA SULLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVI (1888-89), pp. 329-334.

1. La teoria della trasformazione delle equazioni algebriche, mentre è andata acquistando importanza per le conseguenze dedotte da alcuni risultati di essa (per esempio la trasformazione di JERRARD nella risoluzione delle equazioni del quinto grado), non può dirsi abbia fatto progressi notevoli e corrispondenti a quella importanza. Il metodo di TSCHIRNHAUS, per quanto reso di più facile uso dal sig. HERMITE *), rimane pur sempre un metodo col quale si può giungere in alcuni casi a dimostrare la possibilità di un risultato piuttosto che ad ottenerlo. Le più recenti ricerche dei signori KLEIN e GORDAN **), senza dubbio di molto valore, hanno per iscopo forse più quistioni speciali che il problema nella sua generalità, ed in ogni modo tendono anch'esse a porre in evidenza che un determinato risultato è possibile, ancora più che ad ottenerlo.

Io penso che la teoria delle forme possa opportunamente prestarsi a dare un nuovo indirizzo a questo genere di ricerche, ed in questo scritto rammento od espongo alcuni teoremi generali sopra i quali si fonda il metodo di trasformazione che segue.

---

*) HERMITE, *Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 961-967].

**) KLEIN, *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades* [Mathematische Annalen, t. XXVIII (1887), pp. 499-532]; *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig, 1884).

GORDAN, *Ueber Gleichungen fünften Grades* [Mathematische Annalen, t. XXVIII (1887), pp. 152-166].

2. Il punto di partenza è un teorema dovuto al sig. HERMITE *) che trascrivo qui colle sue stesse parole: « Soit $f(x, y)$ une forme d'ordre n et $\psi(x, y)$ un de ses « covariants d'ordre $n-2$; je dis que les coefficients de la transformée en y de l'équa- « tion $f(x, 1)=0$ obtenue en posant

$$y=\frac{\psi(x, 1)}{f'_x(x, 1)}, \tag{1}$$

« sont tous des invariants de $f(x, y)$ ».

Evidentemente la x del secondo membro della (1) è una delle radici della equazione $f(x)=0$, e la y del primo membro la corrispondente radice della equazione trasformata.

Si indichi con $x_r (r=0, 1, \ldots n-1)$ una delle radici della equazione $f(x)=0$ e pongasi:

$$f(x)=(x-x_r)\varphi(x). \tag{2}$$

Ora, in una comunicazione fatta da me recentemente alla Società Matematica di Londra **), ho dimostrato i seguenti due teoremi:

1° ciascun covariante di ordine m e di grado p della forma $f(x)$, nel quale in luogo di x siasi sostituito x_r, si può esprimere in funzione intera e razionale di covarianti di ordine $m+p$ e di grado p della forma $\varphi(x)$;

2° ciascun invariante di grado p della forma $f(x)$ si può esprimere per covarianti di ordine p e di grado p della forma $\varphi(x)$.

Da questi due teoremi si è condotti ad una nuova interpretazione della trasformata in y della equazione $f(x)=0$; essa infatti non è che una relazione o sizigia fra gli invarianti ed i covarianti della forma $\varphi(x)$ di ordine $n-1$, cioè minore di una unità del grado della $f(x)=0$.

Rimane ora a trovare una via diretta per mezzo della quale si possano determinare i valori dei covarianti di $f(x)$, per $x=x_r$ e dei suoi invarianti in funzione dei covarianti e degli invarianti della forma $\varphi(x)$.

Si noti che, posto

$$f_s(x)=\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}\frac{d^s f(x)}{dx^s},$$

$$\varphi_s(x)=\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots(n-s)}\frac{d^s\varphi(x)}{dx^s},$$

*) HERMITE, *Sur l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXI (1865), pp. 965-972 (p. 969)].

**) Sur la transformation des équations algébriques [*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. XX (1889), pp. 127-131].

dalla relazione (2) si ha:

$$f_s(x_r) = \frac{s}{n} \varphi_{s-1}(x_r),$$

e quindi:

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = \frac{1}{n} \varphi_0, \qquad f_2 = \frac{2}{n} \varphi_1, \qquad \ldots$$

nelle quali, come in seguito, supporremo sempre eseguita la sostituzione di x_r ad x.

Sia

$$f(x) = (a_0, a_1, \ldots a_n)(x, 1)^n;$$

è noto che se nel primo coefficiente di un covariante di f, od in un invariante, si sostituiscono ai coefficienti a_0, a_1, ... le f_0, f_1, ... si ottiene il covariante o l'invariante, cosicchè supponendo, per esempio:

$$H = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad k = \tfrac{1}{2}(ff)_4,$$

si hanno le

$$H = f_0 f_2 - f_1^2, \qquad k = f_0 f_4 - 4 f_1 f_3 + 3 f_2^2.$$

Ma questi covarianti H, k, ... sono covarianti, per quanto si è esposto sopra, della forma $\varphi(x)$, ed è anche noto che i covarianti e gli invarianti di una forma qualsivoglia $\varphi(x)$ si esprimono in funzione razionale, intera dei covarianti associati alla stessa forma, sostituendo alle φ_0, φ_1, ... quei covarianti associati.

Ponendo per esempio:

$$h = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \qquad t = 2(\varphi h), \qquad \lambda = \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \qquad \ldots$$

si avrebbero le

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi h, \quad \varphi_3 = \varphi t, \quad \varphi_4 = \varphi(\varphi^2 \lambda - 3h^2), \quad \ldots$$

e quindi:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{1}{n}\varphi, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{3}{n}\varphi h, \quad f_4 = \frac{4}{n}\varphi t, \quad \ldots$$

da cui:

$$H = -\frac{1}{n^2}\varphi^2, \qquad k = -\frac{12}{n^2}\varphi^2 h, \qquad \ldots$$

Se infine osservasi che per mezzo dei covarianti associati ad una data forma si possono stabilire le relazioni sizigetiche fra i covarianti e gli invarianti di essa con semplicità finora non superata da altri metodi, non può rimanere dubbio sulla opportunità di averli introdotti in un metodo di trasformazione, il quale ha per fine la ricerca di una sizigia.

Sia

$$y^n + A_2 y^{n-2} + A_3 y^{n-3} + \cdots + A_n = 0$$

la trasformata in y, per determinare il grado di un coefficiente A_r nei coefficienti a_0, a_1, ... della forma $f(x)$, e quindi di quali invarianti della forma stessa quel coefficiente si componga, è d'uopo distinguere i due casi, secondo che il secondo membro della formola (1) di trasformazione è frazionario od intero. Nel primo caso il grado di A_r è $2(n-1)+r(p-1)$, e nel secondo $r(p-1)$, supponendo essere p il grado del covariante $\psi(x, y)$ *). Supponendo, per esempio, nel primo caso, $n=5$, $p=3$ il grado di A_r è eguale a $2r+8$, e siccome una forma di quinto ordine non ha invariante del 14° grado, sarà $A_3=0$. Così per $n=6$, se nel primo caso $p=2$ e quindi A_r del grado $r+10$, o nel secondo caso $p=4$ ed in conseguenza A_r del grado $3r$, sarà nei due casi $A_3=0$, non possedendo una forma del sesto ordine invarianti di grado 13 e di grado 9.

3. Mi limiterò a considerare per ora il caso di $n=6$. Una forma binaria del sesto ordine ha, come è noto, sei covarianti di secondo ordine, cinque di quarto ordine, e cinque invarianti. Non rammento i covarianti d'ordine superiore al quarto, non essendo necessari per lo scopo presente. Posto

$$k=\tfrac{1}{2}(ff)_4, \quad i=\tfrac{1}{2}(kk)_2; \quad l=(fk)_4, \quad m=(lk)_2, \quad n=(mk)_2,$$

$$a=(kl), \quad b=(km), \quad c=(kn); \quad L=(mn), \quad M=(nl), \quad N=(lm),$$

sono:

6 covarianti del 2° ordine $l, m, n; L, M, N$ e dei gradi 3, 5, 7; 12, 10, 8

5 » » 4° » $k, i; a, b, c$ » 2, 4; 5, 7, 9.

Indicherò infine con A, B, C, D, R gli invarianti dei gradi 2, 4, 6, 10, 15.

La forma φ del quinto ordine ha, come è noto, 19 covarianti e 4 invarianti indipendenti, e fra essi sussistono 18 relazioni. Posto

$$h=\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_2, \quad t=2(\varphi h), \quad \lambda=\tfrac{1}{2}(\varphi\varphi)_4, \quad \omega=(\varphi\lambda),$$

$$p=-\tfrac{1}{3}(\varphi\lambda)_2, \quad u=(\varphi p)_2, \quad \mu=\tfrac{1}{2}(pp)_2, \quad \alpha=(\lambda p)_2,$$

$$g=(\varphi u), \quad \varkappa=(\varphi p), \quad g_4=\tfrac{1}{2}(\lambda\lambda)_2, \quad g_8=(\lambda\mu)_2,$$

*) Vedi la mia Nota: *Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria* [LXXXV: t. II, pp. 281-294].

sono g_4, g_8 invarianti di 4° e di 8° grado; α covariante lineare e del 5° grado; λ, μ del secondo ordine e dei gradi 2, 6; e così via.

I covarianti associati φ_0, φ_1, ... hanno in questo caso i valori:

$$\varphi_0 = \varphi, \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = \varphi h, \qquad \varphi_3 = \varphi t, \qquad \varphi_4 = \varphi(\varphi^2\lambda - 3h^2),$$
$$\varphi_5 = 2\varphi(\varphi^2\omega - ht).$$

Da questi valori, e dalle sizigie esistenti fra i covarianti e gli invarianti della forma φ sopra indicati, si deducono pei valori dei covarianti e degli invarianti di f le seguenti semplici espressioni:

$$6A = -5\lambda, \qquad 18B = \lambda^2 + 3u, \qquad 108C = -(g_4 h + 4p^2),$$
$$9l = -\omega, \qquad 9m = -2g, \qquad 81(n + 2Bl) = \tfrac{1}{2}(g_4 t - 12p\varkappa),$$
$$k = -\tfrac{1}{3}h, \qquad i = \tfrac{1}{36}(\varphi p - h\lambda).$$

Da questi primi risultati si possono già dedurre varie formole di trasformazione. Rammentando che $\varphi = f'(x_r)$, pei valori di k, i si hanno dapprima le due

$$\frac{k}{f'} = -\frac{1}{3}\frac{h}{\varphi}, \qquad \frac{18}{5}\frac{Ak + 10i}{f'} = p,$$

l'una e l'altra delle quali conducono ad una trasformata in cui $A_3 = 0$. In secondo luogo essendo

$$\omega^2 = -(g_4\varphi^2 + 3\varphi\lambda p + \lambda^2 h),$$

si avrà:

$$\frac{27}{25}\frac{75l^2 - 4A^2k}{f'} = -g_4\varphi + \frac{18}{5}Ap,$$

la quale dimostra potersi assumere $y = g_4\varphi$ siccome formola di trasformazione; ed in questo caso essendo $p = 6$ il grado di A_r risulta eguale a $5r$. Così essendo

$$2g\omega = \varphi[2h\alpha + (\lambda^2 + 3u)p] - 2\lambda u h,$$

pei valori di l, m vedesi tosto potersi porre $y = h\alpha$ ed il grado di A_r sarà $7r$; e così di seguito.

I valori dei covarianti biquadratici a, b, c, come quelli di altre combinazioni biquadratiche dei covarianti l, L, ..., possono servire ad altro scopo.

Si hanno per esempio:

$$18a = 3B\varphi - 5hp,$$
$$81b = -(5p^2 + 54C)\varphi + \tfrac{6}{5}Ahp,$$

dalle quali eliminando hp si ha:

$$27(4Aa + 75b) = [18(AB - 75C) - 5^3p^2]\varphi,$$

e quindi dividendo per $\varphi = f'$ e sommando:

$$\sum p^2 = \frac{108}{125}(AB - 75C),$$

dove il $\sum$ si estende alle sei radici di $f(x, 1) = 0$; così dal valore di a si ottiene:

$$\sum \frac{hp}{\varphi} = \frac{18}{5}B,$$

ed altre si otterrebbero dalle combinazioni indicate, delle quali indicherò alcune:

$$\sum \frac{hp^2}{\varphi} = 0, \qquad \sum \frac{hp^4}{\varphi} = 0, \qquad \sum g_4\varphi p^2 = 0, \qquad \sum g_4^2\varphi^2 p = 0,$$

$$\sum g_4^2\varphi h = 0, \qquad \sum g_8\varphi^2 p = 0, \qquad \sum h\alpha p^2 = 0,$$

$$\sum g_4^3\varphi^3 = -3^2.4^3.5^2\sum p^5, \qquad \sum p^5 = \frac{3^6}{4.5^3}R,$$

$$\sum g_4\varphi p = \frac{4^2.3^4}{5^4}(14A^2B + 75AC + 25B^2),$$

e così via.

Il valore di D si ottiene dalla

$$\Delta = 5^5.16(g_4^2 - 144g_8)\varphi^2,$$

nella quale Δ è il discriminante di $f(x)$ *).

Riassumendo, se si moltiplicano le espressioni trovate $\frac{h}{\varphi}$, p, $g_4\varphi$, $h\alpha$, ... per opportune funzioni di A, B, ... onde renderle di gradi eguali, e questi coefficienti

*) Δ contiene linearmente D; vedi in proposito: *Il discriminante delle forme binarie del sesto grado* [LXVI: t. II, pag. 77].

T_0, T_1, ... contengano dei coefficienti numerici indeterminati, si potrà assumere come formola di trasformazione la

$$y = T_0 \frac{h}{\varphi} + T_1 p + T_2 g_4 \varphi + T_3 h\alpha + \cdots$$

e le relazioni dedotte come superiormente serviranno alla determinazione dei valori dei coefficienti A_r.

Milano, 24 febbraio 1889.

[Pi.], [Pa.].

XCIII.

FELICE CASORATI.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVIII (1890), p. 264.

È con sentimento di profonda tristezza che io devo annunciare ai lettori di questi *Annali* la morte avvenuta l'undici settembre scorso di uno dei collaboratori di essi, del Prof. FELICE CASORATI.

L'Università di Pavia, alla quale egli apparteneva dall'anno 1858, ha perduto in lui un insegnante valentissimo, la scienza matematica uno degli uomini che maggiormente la onorarono in questa seconda metà del secolo decimonono.

Egli ebbe molta parte, tanto cogli scritti, quanto coll'insegnamento, a quel risveglio degli studi matematici in Italia, che permette a noi, oggi provetti, di confidare nell'avvenire.

Le sue pubblicazioni, molte delle quali in questi *Annali*, sommano a cinquanta; e fra esse quel volume che ha per titolo: *Teorica delle funzioni di variabili complesse* *), in cui si ammirano accoppiate le eminenti qualità dell'ingegno dell'Autore, la sua estesa coltura ed una esattezza nelle citazioni, pur troppo non comune.

Riservandomi di apprezzare fra breve in questi *Annali* l'opera scientifica del CASORATI, mi limito ora all'annuncio della dolorosa sua perdita.

[Pa.].

---

*) Pavia, Tipografia dei fratelli Fusi, 1868.

XCIV.

ENRICO BETTI.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XX (1892), p. 256.

Il giorno 16 dello scorso mese di agosto furono rese in Pisa solenni onoranze funebri ad uno degli uomini che per le sue eminenti qualità intellettuali e morali maggiormente onorarono l'Italia nella seconda metà di questo secolo, ad ENRICO BETTI.

Conobbi personalmente il BETTI nelle ferie pasquali dell'anno 1858, allorquando convenuti in Genova coll'ottimo GENOCCHI nella casa ospitale di PLACIDO TARDY, iniziammo le trattative col TORTOLINI per la pubblicazione di questi *Annali*.

Già il TORTOLINI con giusto presentimento del risveglio in quel momento degli studi matematici in Italia aveva pubblicato otto volumi dei suoi *Annali di matematica e di fisica*, ed era stato grandemente aiutato nella impresa da geometri italiani e specialmente dai sunnominati.

In questi volumi si trovano quelle Memorie del BETTI: *Sulla risoluzione delle equazioni algebriche* *), *Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche* **), *Sopra la teorica delle sostituzioni* ***), nelle quali egli, pel primo, penetrando negli alti ed astrusi concepimenti di GALOIS sulla teoria delle equazioni algebriche, pose in luce la esattezza delle asserzioni contenute nella celebre lettera a CHEVALIER, iniziando così il movimento in quelle ricerche alle quali oggi ancora è dedicata l'attività di eminenti geometri.

---

*) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche, t. III (1852), pp. 49-51.

**) Ibid., t. IV (1853), pp. 81-100.

***) Ibid., t. VI (1855), pp. 5-34.

Divenuto collaboratore principale di questi *Annali* il BETTI vi pubblicò dapprima varie memorie relative alla teorica delle forme, ed una Monografia sulle funzioni ellittiche, nella quale l'importante teoria è esposta con originalità di metodo.

Dal 1862 in poi la sua attività scientifica può dirsi tutta rivolta agli ardui problemi della Fisica Matematica, ed anche in questo campo la sua acuta intelligenza, le profonde sue cognizioni nell'Analisi Matematica, si rivelarono ben presto nei risultati da lui ottenuti. Oltre venti memorie sue sopra questa disciplina sono contenute in questi *Annali*, nel *Nuovo Cimento*, nelle *Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei Quaranta*, nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*. Infine a questo periodo della sua vita devesi quel suo libro sul *Potenziale*, tradotto in Germania e tanto apprezzato dai cultori di questi studi *).

Il BETTI non ebbe lunga esistenza, essendo nato nei pressi di Pistoja, il 29 ottobre 1823. Egli fu insegnante esimio e caldo amico dei suoi discepoli. A lui principalmente spetta l'onore di avere, e colla sua parola e col suo esempio, fondata quella scuola matematica dell'Università di Pisa, dalla quale sono usciti in molta parte i giovani valorosi che hanno mantenuto e mantengono alto il nome italiano negli studi matematici. È a questi giovani geometri che io, rammentando la cospicua partecipazione del BETTI nell'iniziare la pubblicazione di questi *Annali* e nel collaborarvi, raccomando il loro avvenire.

Ottobre 1892.

[Pa.].

*) *Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni all'Elettrostatica e al Magnetismo*, Pisa, Tipografia Nistri e C., 1879.

XCV.

SULLA TRASFORMAZIONE DELL'UNDECIMO ORDINE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXI (1893), pp. 309-315.

1. In una Memoria pubblicata negli *Annali* *) io dimostrava che considerando cinque quantità y_1, y_4, y_9, y_5, y_3 per le quali sussistano le dieci relazioni

$$y_r^3 y_{4r} + y_{4r}^3 y_{9r} + y_{9r}^3 y_{5r} = 0, \qquad y_r^2 y_{4r} y_{3r} - y_{9r}^2 y_{5r} y_{4r} - y_{5r}^2 y_r y_{3r} = 0$$

per $r = 1, 4, 9, 5, 3 \pmod{11}$, relazioni già note pei lavori del sig. KLEIN **), ed indicando con f la forma cubica di quelle cinque quantità

$$f = y_1^2 y_3 + y_4^2 y_1 + y_9^2 y_5 + y_5^2 y_4 + y_3^2 y_9 = (y_r^2 y_{3r}),$$

si avevano i seguenti risultati.

Posto

$$l = y_1 y_4 y_9 y_5 y_3,$$

erano per le relazioni superiori:

$$(y_r^3 y_{4r} y_{5r}) = l, \qquad (y_r^3 y_{9r}^2) = -2l,$$

---

*) *Sulla teoria delle funzioni ellittiche* [LXXXVI: t. II, pp. 295-318].

**) KLEIN, *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 533-555].

quindi l'hessiano h della forma f:

$$h = 3y_1 y_4 y_9 y_5 y_3 + (y_r^3 y_{9r}^2) - (y_r^3 y_{4r} y_{5r}) = 0,$$

ed anche eguali a zero le sue derivate rispetto ad $y_1, y_4, \ldots y_3$.

Che inoltre, considerando le tre forme degli ordini 4°, 6°, 11°

$$m = (y_r^2 y_{4r} y_{9r}), \qquad n = (y_r^3 y_{4r}^2 y_{9r}), \qquad p = (y_r^{11}),$$

fra le cinque forme f, l, m, n, p sussistevano le tre relazioni:

$$m^2 n + 22 l^2 m - 11 f l n + 2 f^3 l = 0,$$

$$11 n^2 - 4 m^3 - 4 f l m - 2 f^2 n = 0,$$

$$l p + 44 l^2 n + m^4 - 6 f l m^2 - 6 f^2 l^2 = 0,$$

dalla prima delle quali deducendo il valore di n in funzione di f, l, m, cioè

$$n = 2l \frac{11 l m + f^3}{11 f l - m^2},$$

ottenevasi dalla seconda:

$$m^5 - 21 f l m^3 + 88 f^2 l^2 m - l(11^3 l^3 + f^5) = 0,$$

e dall'ultima:

$$p = \frac{1}{11 f l - m^2} [4 f m^4 - 28 f^2 l m^2 + (3 \cdot 11^2 l^3 + f^5) m - 22 f^3 l^2].$$

Pongasi in queste equazioni

$$f = 1, \qquad l = \frac{z^4}{11^2}, \qquad m = -\frac{v z^2}{11};$$

dalla seconda si ha:

$$v(v^4 - 21 v^2 + 88) = -Z,$$

essendo

$$Z = \frac{z^{12} + 11^3}{z^6};$$

ed indicando con Y la espressione

$$Y = \frac{z^{12} - 11^3}{z^6},$$

si dedurrà:

$$Y = (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)},$$

$$\Phi(v) = v^6 - 20 v^4 + 56 v^2 - 44.$$

Sieno:

$$R = \quad v(v^4 - 21v^2 + 88) + (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)},$$

$$S = -v(v^4 - 21v^2 + 88) + (v^2 - 11)\sqrt{\Phi(v)};$$

pei valori di Y, Z saranno:

$$(1) \qquad R = -\frac{2.11^3}{z^6}, \qquad S = 2z^6, \qquad RS = -4.11^3,$$

e per queste si hanno i seguenti valori di n e di p:

$$11^2 n = v\sqrt{\Phi} - (v^4 - 10v^2 - 22),$$

$$11\frac{p}{l} = -4v\sqrt{\Phi} - (7v^4 - 26v^2 + 22).$$

2. Nella citata Memoria ho anche dimostrato che indicando con g_2, g_3 i noti invarianti e con $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$, avevasi (pag. 314):

$$-12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} = p - 238fm^2 - 1678f^2l + 11.664ln,$$

e sostituendo in questa per f, l, ... p i valori superiori si giunge alla

$$12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{l} = 61v^4 - 368v^2 + 11.32 - 60v\sqrt{\Phi} = P.$$

Ora pel valore di l si ha:

$$l^3 = \frac{z^{12}}{11^6} = \frac{4}{R^2},$$

quindi:

$$(2) \qquad 12\frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} = \frac{Pz^4}{11^2}, \qquad \frac{g_2^3}{\delta} = \frac{1}{3^3.4^2}\frac{P^3}{R^2},$$

ed in conseguenza:

$$(3) \qquad 8.27\frac{g_3}{\delta^{\frac{1}{2}}} = -\frac{Qz^6}{11^3}, \qquad 27\frac{g_3^2}{\delta} = \frac{1}{3^3.4^2}\frac{Q^2}{R^2},$$

essendo

$$Q = 7(95v^6 - 1104v^4 + 11.192v^2 - 8.11^2) - 18v(37v^2 - 88)\sqrt{\Phi(v)},$$

e

$$P^3 - Q^2 = 3^3 . 4^2 R^2 \text{ *)}.$$

3. Oltre a quest'ultima relazione, i valori dei polinomi P, Q, R, S soddisfano identicamente alla

$$\frac{1}{4}(11^5 S^2 - R^2) - 90.11^6 + 40.11^4 P - 15.11^3 Q + 2.11^2 P^2 - PQ = 0,$$

nella quale sostituendo alle P, Q, R, S i loro valori in z, g_2, g_3 dati dalle (1), (2), (3), si giunge alla

$$z^{24} + 11\left(-90 z^{12} + 40.12 \frac{g_2}{\delta^{\frac{1}{3}}} z^8 + 15.8.27 \frac{g_3}{\delta^{\frac{1}{2}}} z^6 + 2.12^2 \frac{g_2^2}{\delta^{\frac{2}{3}}} z^4\right)$$
$$+ 12.8.27 \frac{g_2 g_3}{\delta^{\frac{5}{6}}} z^2 - 11 = 0,$$

ossia alla nota equazione modulare.

4. Indicando con P', Q', ... le derivate dei polinomi P, Q, ... rispetto a v, si ottengono le relazioni seguenti:

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} (5v^2 - 8)P &= \tfrac{3}{2} P' \sqrt{\Phi} + Q, \\ (5v^2 - 8)Q &= Q' \sqrt{\Phi} + P^2, \\ (5v^2 - 8)R &= R' \sqrt{\Phi}, \\ (5v^2 - 8)S &= -S' \sqrt{\Phi}, \end{aligned}\right.$$

e da queste le

$$(5) \qquad 3P'R - 2R'P = -2\frac{QR}{\sqrt{\Phi}}, \qquad Q'R - QR' = -\frac{P^2 Q}{\sqrt{\Phi}}.$$

Si indichi con D il simbolo di operazione

$$D = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

*) Vedi: F. KLEIN, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen ausgearbeitet und vervollständigt von* Dr. R. FRICKE, t. II (Leipzig 1892), pag. 440. — KIEPERT, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade* [Mathematische Annalen, t. XXXII, pp. 1-135 (pag. 98)]. La quantità η delle formole del sig. KIEPERT è uguale a $v^2 - 8$.

pel quale:

$$D(g_2) = 12 g_3, \qquad D(g_3) = \frac{2}{3} g_2^2, \qquad D(\delta) = 0.$$

Operando col simbolo D sopra l'una, o sopra l'altra delle due equazioni (2), (3)

$$\frac{g_2^3}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{P^3}{R^2}, \qquad 27 \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{1}{3^3 \cdot 4^2} \frac{Q^2}{R^2},$$

si giunge per le relazioni (5) alla

$$D(v) = -2^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{\Phi}}{R^{\frac{1}{3}}},$$

o pel valore (1) di R:

$$11 D(v) = \delta^{\frac{1}{6}} \sqrt{\Phi} . z^2 .$$

Ora, essendo

$$D(R) = R' D(v),$$

si avrà per la terza delle relazioni (4):

$$11 \frac{D(R)}{R} = \delta^{\frac{1}{6}} (5 v^2 - 8) z^2,$$

ed infine per la (1):

$$11 \frac{D(z)}{z} = -\frac{1}{6} \delta^{\frac{1}{6}} (5 v^2 - 8) z^2 .$$

Se quindi indichiamo con

$$T(x) = x^5 + 5 a_1 x^4 + 10 a_2 x^3 + 10 a_3 x^2 + 5 a_4 x + a_5 = 0,$$

la equazione di cui le radici sono

$$\wp\left(\frac{2\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{6\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{11}\right), \quad \wp\left(\frac{10\omega}{11}\right),$$

sarà:

$$a_1 = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \delta^{\frac{1}{6}} (5 v^2 - 8) z^2, \tag{6}$$

o, ponendo $y = 12 a_1$, sarà:

$$y = \delta^{\frac{1}{6}} (x_1 - x_2 v^2) z^2, \qquad \left(x_1 = \frac{8}{5}, \ x_2 = 1\right) \text{*)}.$$

5. È noto che dal valore superiore (6) di a_1 si deducono quelli di $a_2, a_3, \ldots$

*) KLEIN-FRICKE, Opera citata, t. II, pag. 442.

mediante una successiva applicazione del simbolo di operazione D. Si hanno cioè per $a_2, a_3, \ldots$ i valori:

$$5.8\,a_2 = 11\,D(a_1) + 5.6\,a_1^2 - \tfrac{17}{6}g_2,$$

$$7.6\,a_3 = 11\,D(a_2) + 5.6\,a_1 a_2 - \tfrac{23}{5}g_2 a_1 + 2g_3,$$

e così via; e da questi ottengonsi i valori degli invarianti della trasformazione γ_2, γ_3 *).

Con breve calcolazione si ottengono così le formole:

$$\gamma_2 - 11^2 g_2 = 10\,\delta^{\frac{1}{3}} v\sqrt{\Phi}.\zeta^4, \qquad \gamma_3 + 11^3 g_3 = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{6}v(37v^2 - 88)\sqrt{\Phi}.\zeta^6,$$

dalle quali indicando con M, N i valori di P, Q nei quali si muti segno al radicale $\sqrt{\Phi}$, e quindi sia:

$$M^3 - N^2 = 3^3.4^2 S^2 = 3^3.4^3\zeta^{12},$$

si hanno le

$$\gamma_2 = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}\zeta^4}{3.4}M, \qquad \gamma_3 = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\zeta^6}{8.27}N,$$

da cui:

$$\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 = \Delta = \delta\zeta^{24},$$

ed infine:

$$\frac{\gamma_2^3}{\Delta} = \frac{1}{3^3.4^2}\frac{M^3}{S^2}, \qquad 27\frac{\gamma_3^2}{\Delta} = \frac{1}{3^3.4^2}\frac{N^2}{S^2}.$$

6. La equazione modulare del dodicesimo grado in a_1 od in y [equazione (6)] ha la proprietà comune a tutte le equazioni della stessa specie **) di essere rappresentabile cioè sotto la forma:

$$F(y) + \delta f(y) = 0, \tag{7}$$

essendo $F(y)$ un polinomio del grado 12°, del quale sono noti i coefficienti ed $f(y)$ un polinomio del 6° grado a coefficienti indeterminati.

Posto

$$v^2 - \tfrac{8}{5} = \rho,$$

si avrà:

$$y = -\delta^{\frac{1}{6}}\rho\zeta^2;$$

---

*) Vedi la mia comunicazione: *Sur une classe d'équations modulaires* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXII (1891), pp. 28-32].

**) Vedi la mia Nota: *Sulle equazioni modulari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. V, t. II (1893, 2° sem.), pp. 185-192].

ed essendo

$$F(y) = y^{12} - 6.11.12 g_2 y^{10} + 11.40.216 g_3 y^9 - 11.135.12^2 g_2^2 y^8$$
$$+ 11.288.12 g_2.216 g_3 y^7 - 11.420.12^3 g_2^3 y^6 + 11.432.12^2 g_2^2.216 g_3 y^5$$
$$- 11.315.12^4 g_2^4 y^4 + 11.160.12^3 g_2^3.216 g_3 y^3 - 11.54.12^5 g_2^5 y^2$$
$$+ 120.12^4 g_2^4.216 g_3 y - 11.12^6 g_2^6,$$

sostituendo per y il valore superiore e per g_2, g_3 quelli dati dalle relazioni (2), (3), si avrà :

$$F(y) = \delta^2 \zeta^{24}\left(\rho^{12} - \frac{6}{11} P\rho^{10} + \frac{40}{11^2} Q\rho^9 - \frac{135}{11^3} P^2\rho^8 + \frac{288}{11^4} PQ\rho^7 - \frac{420}{11^5} P^3\rho^6\right.$$
$$\left. + \frac{432}{11^6} P^2 Q\rho^5 - \frac{315}{11^7} P^4\rho^4 + \frac{160}{11^8} P^3 Q\rho^3 - \frac{54}{11^9} P^5\rho^2 + \frac{120}{11^{11}} P^4 Q\rho - \frac{1}{11^{11}} P^6\right),$$

ossia :

$$F(y) = \delta^2 \zeta^{24} A(v).$$

Ora indicando $f(y)$ con

$$f(y) = \alpha_0 y^6 + 12 g_2.\alpha_1 y^4 + 216 g_3.\alpha_2 y^3 + 12^2 g_2^2.\alpha_3 y^2$$
$$+ 12.216 g_2 g_3.\alpha_4 y + 12^3 g_2^3 \alpha_5 + \delta\alpha_6,$$

nella quale α_0, α_1, ... α_6 sono coefficienti numerici a determinarsi, si otterrà :

$$f(y) = \delta\zeta^{12}\left(\alpha_0\rho^6 + \frac{\alpha_1}{11^2} P\rho^4 + \frac{\alpha_2}{11^3} Q\rho^3 + \frac{\alpha_3}{11^4} P^2\rho^2 + \frac{\alpha_4}{11^5} PQ\rho + \frac{\alpha_5}{11^6} P^3 + \frac{\alpha_6}{4.11^6} R^2\right),$$

ossia :

$$f(y) = \delta\zeta^{12} B(v).$$

La equazione (7) condurrà quindi alla equazione identica

$$A(v) + \frac{1}{4.11^6} R B(v) = 0,$$

e da questa eguagliando a zero i coefficienti delle potenze di v si dedurranno i valori dei coefficienti α_0, α_1, ...

Dicembre 1893.

[Pa.].

XCVI.

LA TRASFORMAZIONE, D'ORDINE PARI, DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXII (1894), pp. 313-322.

1. La trasformazione, d'ordine pari, delle funzioni ellittiche e la ricerca delle corrispondenti equazioni modulari furono scarsamente considerate fin qui dagli analisti. Quanto di più esteso fu scritto intorno a questo argomento trovasi in una interessante Memoria del sig. KIEPERT *); ma le equazioni modulari delle quali l'Autore si occupa, come precedentemente a lui aveva fatto il sig. GIERSTER **), sono quelle denominate del moltiplicatore o Jacobiane.

Data l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \tag{1}$$

sono integrali algebrici della medesima:

I. — Supponendo n dispari, l'equazione:

$$y = \frac{U(x)}{T^2(x)},$$

*) KIEPERT, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade* [Mathematische Annalen, t. XXXII (1888), pp. 1-135].

**) GIERSTER, *Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad* [Ibid., t. XIV (1879), pp. 537-544; t. XXVI (1886), pp. 590-592].

nella quale:

$$(2)\qquad T(x) = x^{\frac{n-1}{2}} + \alpha_1 x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + \alpha_{\frac{n-1}{2}},$$

ed

$$U(x) = (nx + 2\alpha_1)T^2 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)TT' - \varphi(x)(TT'' - T'^2),$$

essendo: $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, $T' = \frac{dT}{dx}$, $T'' = \frac{d^2T}{dx^2}$.

II. — Nel caso di n pari:

$$y = \frac{V(x)}{(x-e)P^2(x)},$$

nella quale:

$$(3)\qquad P(x) = x^{\frac{n}{2}-1} + a_1 x^{\frac{n}{2}-2} + \cdots + a_{\frac{n}{2}-1},$$

e

$$V(x) = (x-e)\{[(n-1)x + 2a_1]P^2 - \tfrac{1}{2}\varphi'(x)PP' - \varphi(x)(PP'' - P'^2)\} + hP^2,$$

essendo e una delle radici della equazione $\varphi(x) = 0$ ed $h = 3e^2 - \frac{1}{4}g_2$.

Indicando con $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ le somme delle potenze delle radici dell'equazione $T(x) = 0$, e con $s_1, s_2, \ldots$ le analoghe somme per l'equazione $P(x) = 0$, si hanno per n dispari:

$$(4)\qquad \begin{cases} \gamma_2 = 120\sigma_2 - (5n-6)g_2, \\ \gamma_3 = 280\sigma_3 - 42g_2\sigma_1 - (14n-15)g_3, \end{cases}$$

e per n pari:

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma_2 = 120s_2 - (5n-6)g_2 + 60e^2, \\ \gamma_3 = 280s_3 - 42g_2s_1 - (14n-50)g_3 + 14g_2e, \end{cases}$$

ed in conseguenza, denominando con G_2, G_3 i valori di γ_2, γ_3 nel caso di $n = 2$, si avranno le

$$(6)\qquad G_2 = 60e^2 - 4g_2, \qquad G_3 = 14g_2e + 22g_3,$$

e quindi:

$$G_2 - g_2 = 20h, \qquad G_3 - g_3 = 28he,$$

ed i valori di γ_2, γ_3 pel caso di n pari possono scriversi:

$$\gamma_2 - G_2 = 120s_2 - 5(n-2)g_2,$$

$$\gamma_3 - G_3 = 280s_3 - 42g_2s_1 - 14(n-2)g_3.$$

Infine, posto

$$(7)\qquad \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2\xi - G_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

dalla formola superiore di trasformazione per n pari si otterrà:

$$\xi = x + \frac{h}{x - e}, \tag{8}$$

e per la (1)

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}} = \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2 \xi - G_3}}. \tag{9}$$

2. Sia dapprima $n = 2m$ ed m numero dispari. Si avrà per quest'ultima (9)

$$y = \frac{U(\xi)}{T^2(\xi)},$$

i polinomi $T(\xi)$, $U(\xi)$ deducendosi dalle espressioni (2) nelle quali ad x, n, g_2, g_3 si sostituiscano ξ, m, G_2, G_3. Ora pel valore dato sopra di ξ si hanno le

$$(x - e)^{\frac{m-1}{2}} T(\xi) = P(x), \qquad (x - e)^m U(\xi) = V(x),$$

da cui:

$$\frac{U(\xi)}{T^2(\xi)} = \frac{V(x)}{(x - e) P^2(x)},$$

inoltre:

$$P(x) = x^{\frac{n}{2}-1} + \left(\alpha_1 - \frac{n-2}{4} e\right) x^{\frac{n}{2}-2} + \cdots,$$

e quindi:

$$a_1 = \alpha_1 - \frac{n-2}{4} e,$$

ossia:

$$\sigma_1 = s_1 - \frac{n-2}{4} e = s_1 - \frac{m-1}{2} e.$$

Si ha così il teorema: *Se nella equazione modulare corrispondente alla trasformazione di ordine m dispari si sostituisce a* σ_1 *la espressione* $s_1 - \frac{n-2}{4} e$, *ed a* g_2, g_3 *le quantità* G_2, G_3, *si ottiene l'equazione modulare corrispondente alla trasformazione dell'ordine* $2m = n$.

Sia, per esempio, $m = 3$; la nota equazione modulare è in questo caso la

$$\sigma_1^4 - \tfrac{1}{2} g_2 \sigma_1^2 - g_3 \sigma_1 - \tfrac{1}{48} g_2^2 = 0,$$

e la equazione modulare per $n = 6$ sarà:

$$(s_1 - e)^4 - \tfrac{1}{2} G_2 (s_1 - e)^2 - G_3 (s_1 - e) - \tfrac{1}{48} G_2^2 = 0.$$

Inoltre, per la trasformazione del terzo ordine essendo per le (4)

$$\gamma_2 = 120\sigma_1^2 - 9g_2, \qquad \gamma_3 = 280\sigma_1^3 - 42g_2\sigma_1 - 27g_3,$$

sarà per quella di sesto ordine:

$$\gamma_2 = 120(s_1 - e)^2 - 9G_2, \qquad \gamma_3 = 280(s_1 - e)^3 - 42G_2(s_1 - e) - 27G_3.$$

3. Sia in secondo luogo $n = 4$; le equazioni (3) dànno:

$$y = \frac{V(x)}{(x-e)P^2(x)}, \qquad P(x) = x + a_1,$$

$$V(x) = (x-e)\left[x^3 + 2a_1x^2 + \left(7a_1^2 - \tfrac{1}{2}g_2\right)x + 2a_1^3 + \tfrac{1}{2}g_2a_1 - g_3\right] + h(x+a_1)^2.$$

Ora per la (9) si ha:

$$y = \xi + \frac{k}{\xi - \varepsilon},$$

essendo $k = 3\varepsilon^2 - \frac{1}{4}G_2$, e sostituendo in quest'ultima per ξ il valore (8) si ottengono le

$$P^2(x) = (x-e)(x-\varepsilon) + h,$$

$$V(x) = (x-e)[x(x-e)(x-\varepsilon) + hx + k(x-e)] + hP^2(x),$$

le quali poste a confronto coi valori superiori dànno:

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}(e+\varepsilon), \qquad a_1^2 = h + e\varepsilon,$$

ossia:

$$(a_1 + e)^2 = h, \qquad (e-\varepsilon)^2 = 4h,$$

e

$$6a_1^2 - \tfrac{1}{2}g_2 = k, \qquad 2a_1^3 + \tfrac{1}{2}g_2a_1 - g_3 = -ke.$$

Posto come sopra: $a_1 = -s_1$, si ottiene l'equazione modulare per la trasformazione del quarto ordine:

$$(s_1 - e)^2 = h,$$

ed i valori degli invarianti:

$$\gamma_2 = 60\varepsilon^2 - 4G_2, \qquad \gamma_3 = 14G_2\varepsilon + 22G_3.$$

4. Suppongasi $n = 4m$ ed m numero dispari. Dalla (7) per una trasformazione del quarto ordine si hanno le

$$\xi = \frac{V(x)}{(x-e)P^2(x)}, \qquad P(x) = x + a_1, \qquad (a_1 + e)^2 = (s_1 - e)^2 = h,$$

$$V(x)=(x-e)\left[x^3+2a_1x^2+(7a_1^2-\tfrac{1}{2}g_2)x+2a_1^3+\tfrac{1}{2}g_2a_1-g_3\right]+h(x+a_1)^2,$$

inoltre:

$$G_2=120s_1^2+60e^2-14g_2, \qquad G_3=280s_1^3-42g_2s_1+14g_2e-6g_3,$$

e dalla (9) per una trasformazione d'ordine m dispari, la

$$y=\frac{U(\xi)}{T^2(\xi)},$$

essendo

$$T(\xi)=\xi^{\frac{m-1}{2}}+\alpha_1\xi^{\frac{m-3}{2}}+\cdots+\alpha_{\frac{m-1}{2}},$$

ed

$$U(\xi)=(m\xi+2\alpha_1)T^2-\tfrac{1}{2}\Phi'(\xi)TT'-\Phi(\xi)(TT''-T'^2),$$

nella quale $\Phi(\xi)=4\xi^3-G_2\xi-G_3$.

Sostituendo il valore superiore di ξ si giunge alla

$$y=\frac{M(x)}{(x-e)N^2(x)}.$$

Ora, posto

$$N(x)=x^{2m-1}+A_1x^{2m-2}+\cdots+A_{2m-1},$$

si ha per $M(x)$ il valore corrispondente [equazioni (3)], ed

$$A_1=\alpha_1-\frac{3m-1}{2}e+m(a_1+e),$$

ossia:

$$\sigma_1=S_1-\frac{3m-1}{2}e-m(s_1-e).$$

Si ha così il teorema: *Sostituendo nella equazione modulare corrispondente ad una trasformazione di ordine m dispari in luogo di* σ_1 *la espressione superiore, ed i valori di* G_2, G_3 *dati sopra in luogo di* g_2, g_3; *eliminando in seguito* s_1 *per mezzo della* $(s_1-e)^2=h$, *si ottiene la equazione modulare corrispondente alla trasformazione d'ordine* $4m$.

5. Consideriamo infine il caso di $n=8$. Per una trasformazione di secondo ordine si ha:

$$\xi=x+\frac{h}{x-e},$$

e per una di quarto:

$$y=\frac{V(\xi)}{(\xi-\varepsilon)P^2(\xi)}, \qquad P(\xi)=\xi+a_1,$$

e $V(\xi)$ si ottiene dalla (3) sostituendo ξ, ε, k alle x, e, h, e ponendo $n=4$.

Ponendo in quest'ultime il valore di ξ si giunge alla

$$y = \frac{M(x)}{(x-e)N^2(x)},$$

nella quale posto

$$N(x) = x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3,$$

ed $A_1 = -S_1$, trovasi:

$$S_1 - 3e = s_1 - \varepsilon + \tfrac{3}{2}(\varepsilon - e).$$

Ma per la trasformazione del quarto ordine si ha:

$$(s_1 - \varepsilon)^2 = k;$$

così, dopo qualche riduzione, si arriva alla equazione modulare per la trasformazione dell'ottavo ordine:

$$(S_1 - 3e)^4 - 34h(S_1 - 3e)^2 - 144he(S_1 - 3e) + h^2 - 144he^2 = 0.$$

Si avranno inoltre le [equazioni (5)]:

$$\gamma_2 = 120 S_2 + 60e^2 - 34g_2 = 120 s_1^2 + 60\varepsilon^2 - 14 G_2,$$

$$\gamma_3 = 280 S_3 - 42 g_2 S_1 + 14 g_2 e - 62 g_3 = 280 s_1^3 - 42 G_2 s_1 + 14 G_2 \varepsilon - 6 G_3.$$

6. Non è d'uopo aggiungere altri esempi per dimostrare come il metodo si presti facilmente alla ricerca delle equazioni modulari corrispondenti ad un numero pari, ed a quella dei valori degli invarianti della trasformata. Ed è anche evidente che il metodo stesso è applicabile alla ricerca delle equazioni modulari corrispondenti ad una trasformazione di ordine n, essendo n il prodotto di due o più numeri primi. Infatti per $n = 9$ una prima trasformazione di terzo ordine dà le

$$s_1^4 - \tfrac{1}{2} g_2 s_1^2 - g_3 s_1 - \tfrac{1}{48} g_2^2 = 0, \tag{10}$$

$$G_2 = 120 s_1^2 - 9 g_2, \qquad G_3 = 280 s_1^3 - 42 g_2 s_1 - 27 g_3,$$

ed una seconda trasformazione del terzo ordine le

$$\sigma_1^4 - \tfrac{1}{2} G_2 \sigma_1^2 - G_3 \sigma_1 - \tfrac{1}{48} G_2^2 = 0, \tag{11}$$

$$\gamma_2 = 120 \sigma_1^2 - 9 G_2, \qquad \gamma_3 = 280 \sigma_1^3 - 42 G_2 \sigma_1 - 27 G_3.$$

Ora, per la formola di trasformazione del nono ordine

$$y = \frac{U(x)}{T^2(x)},$$

posto

$$T(x) = x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

ed indicando con S_1, S_2, ... le somme delle potenze delle radici della equazione $T(x) = 0$, si trovano le

$$S_1 = 3 s_1 + \sigma_1, \qquad S_2 = \sigma_1^2 - 9 s_1^2 + g_2,$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 18 s_1^2 \sigma_1 - 27 s_1^3 + \tfrac{3}{2} g_2 (3 s_1 + \sigma_1) + 3 g_3.$$

Sostituendo nelle (11) in luogo di σ_1 il valore $S_1 - 3 s_1$ e per G_2, G_3 i valori superiori, si ottiene la

$$S_1^3 - 12 s_1 S_1^2 - \left(6 s_1^2 - \tfrac{9}{2} g_2\right) S_1 - 28 s_1^3 + 15 g_2 s_1 + 27 g_3 = 0,$$

ed eliminando s_1 da questa e dalla (10) si giunge alla equazione modulare del 14° grado corrispondente alla trasformazione del nono ordine.

I valori superiori per γ_2, γ_3 nei quali si sostituiscono quelli di G_2, G_3 dànno:

$$\gamma_2 = 120(\sigma_1^2 - 9 s_1^2) + 81 g_2 = 120 S_2 - 39 g_2,$$

$$\gamma_3 = 280(\sigma_1^3 - 18 s_1^2 \sigma_1 - 27 s_1^3) + 378 g_2 (3 s_1 + \sigma_1) + 3^6 g_3 = 280 S_3 - 42 g_2 S_1 - 111 g_3,$$

come deve essere per le relazioni generali (4).

7. Posto

$$\delta = g_2^3 - 27 g_3^2, \qquad D = G_2^3 - 27 G_3^2, \qquad \Delta = \gamma_2^3 - 27 \gamma_3^2,$$

dalle equazioni (6) deducesi la

$$D + 16\delta = 3.4^2 g_2 (6 g_2 e^2 - 9 g_3 e - g_2^2),$$

e da questa le

$$(12) \qquad (D + 16\delta)^2 = 3^2.4^4 g_2^2 \delta (g_2 - 3 e^2), \qquad (D + 16\delta)^3 = 3^3.4^3 g_2^3 \delta D;$$

ma, supponendo $e = e_1$, $g_2 - 3 e_1^2 = (e_2 - e_3)^2$; si ha quindi:

$$\frac{D^{\frac{1}{3}}}{\delta^{\frac{1}{3}}} = \pm 4 \frac{e_2 - e_3}{\delta^{\frac{1}{6}}}.$$

Si indichi il rapporto $\dfrac{D}{\delta}$ con t^{24}; dalla seconda delle (12) si ha:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} 3^3 \cdot 4^3 \frac{g_2^3}{\delta} &= \frac{(t^{24}+16)^3}{t^{24}}, \\ 3^6 \cdot 4^3 \frac{g_3^2}{\delta} &= \frac{(t^{24}-8)^2(t^{24}+64)}{t^{24}}, \end{aligned}\right.$$

o la equazione modulare del moltiplicatore per $n = 2$. Inoltre dalla (6) e dalle (12) si deduce:

$$5 D^{\frac{2}{3}} = 4 \delta^{\frac{1}{3}} (16 g_2 - G_2),$$

e quindi le

$$(14)\qquad 3^3 \cdot 4^3 \frac{G_2^3}{D} = \frac{(t^{24}+4^4)^3}{t^{48}}, \qquad 3^6 \cdot 4^3 \frac{G_3^2}{D} = \frac{(t^{24}-2.4^4)^2(t^{24}+64)}{t^{48}}.$$

Consideriamo ora i due casi di $n = 4$, $n = 6$. Poniamo:

$$v^{24} = \frac{\Delta}{D}, \quad z^{24} = \frac{\Delta}{\delta}, \quad \text{da cui} \quad z = vt.$$

Nel primo caso avremo come sopra [equazioni (13)]:

$$12 \frac{G_2}{D^{\frac{1}{3}}} = \frac{v^{24}+16}{v^8},$$

e quindi per le (14):

$$\frac{t^{24}+256}{t^{16}} = \frac{v^{24}+16}{v^8},$$

da cui:

$$t^{24} = z^8(z^8+16).$$

Si hanno così per le stesse (13) le seguenti:

$$3^3 \cdot 4^3 \frac{g_2^3}{\delta} = \frac{(z^{16}+16 z^8+16)^3}{z^8(z^8+16)}, \qquad 3^6 \cdot 4^3 \frac{g_3^2}{\delta} = \frac{(z^{24}+24 z^{16}+120 z^8-64)^2}{z^8(z^8+16)},$$

o la equazione modulare del moltiplicatore per $n = 4$.

Nel secondo caso si hanno, come è noto, le

$$3^3 \cdot 4^3 \frac{G_2^3}{D} = \frac{(v^{12}+3)^3(v^{12}+27)}{v^{12}}, \qquad 3^6 \cdot 4^3 \frac{G_3^2}{D} = \frac{(v^{24}+18 v^{12}-27)^2}{v^{12}},$$

e quindi:

$$\frac{t^{24}+4^4}{t^{16}} = \frac{(v^{12}+3)(v^{12}+27)^{\frac{1}{3}}}{v^4},$$

dalla quale, dalla $z = vt$ e da una delle (13) eliminando v, t si ottiene l'equazione modulare in z.

Ponendo

$$v^{12} + 27 = \frac{(4m^3 + 1)^3}{m^3},$$

si ha:

$$v^{12} + 3 = \frac{1}{m^3}(64m^9 + 48m^6 - 12m^3 + 1),$$

e quindi:

$$(v^{12} + 3)(v^{12} + 27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{m^4}[1 - 8m^3 + 4^4 m^9(m^3 + 1)].$$

Ne risulta che l'equazione superiore è soddisfatta facendo:

$$t^{24} = \frac{1 - 8m^3}{m^9(m^3 + 1)},$$

e siccome

$$v^{12} = \frac{(m^3 + 1)(1 - 8m^3)^2}{m^3},$$

sarà:

$$z^{24} = \frac{(m^3 + 1)(1 - 8m^3)^5}{m^{15}},$$

formole già date dal prof. KIEPERT.

8. Indicando con b il noto simbolo di operazione

$$12g_3\frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3},$$

pel quale:

$$b(g_2) = 12g_3, \qquad b(g_3) = \tfrac{2}{3}g_2^2, \qquad b(\delta) = 0,$$

si ha:

$$b(e) = 4e^2 - \tfrac{2}{3}g_2,$$

ed in conseguenza per le (6):

$$b(G_2) = 6G_3 - 4G_2 e, \qquad b(G_3) = \tfrac{1}{3}G_2^2 - 6G_3 e,$$

ed indicando con H lo stesso simbolo di operazione sostituendo G_2, G_3 a g_2, g_3, si avrà:

$$b = \frac{1}{2}H - 2e\left(2G_2\frac{\partial}{\partial G_2} + 3G_3\frac{\partial}{\partial G_3}\right),$$

od anche:

$$b = \frac{1}{2}H - 2e\left(2g_2\frac{\partial}{\partial g_2} + 2g_3\frac{\partial}{\partial g_3}\right).$$

Per queste operando sulle quantità D, Δ, si ottengono le

$$h(D) = -12 e D,$$

$$h(\Delta) = \frac{1}{2} H(\Delta) - 12 e \Delta.$$

Sia $n = 2m$ ed m numero primo, si ha come è noto:

$$\sigma_1 = -\frac{m}{48} \frac{H(\Delta)}{\Delta},$$

quindi:

$$n \frac{h(\Delta)}{\Delta} = -48 \sigma_1 - 12 n e, \qquad n \frac{h(D)}{D} = -12 n e,$$

dalle quali:

$$\sigma_1 = -m h(\log v), \qquad e = -2 h(\log t).$$

Ora dalla $z = v t$ si deduce:

$$n h(\log z) = -2 \sigma_1 - m e;$$

ma, come si è dimostrato al n° 2: $\sigma_1 = s_1 - \frac{m-1}{2} e$; si avrà dunque:

$$2 s_1 + e = -n h(\log z).$$

Infine anche nel caso di n pari si ottengono i valori di $h(a_1)$, $h(a_2), \ldots$ dalla relazione generale:

$$n h[P(x)] = \varphi(x) P''(x) - \left[2(2n-5)x^2 - \tfrac{1}{12}(4n-9)g_2 - 4ex - 4e^2\right] P'(x)$$
$$+ [(n-1)(n-2)x - 6a_1 - 2(n-2)e] P(x).$$

Settembre 1894.

[Pa.].

XCVII.

NUOVE FORMOLE NELLA MOLTIPLICAZIONE E NELLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIII (1895), pp. 73-91.

1. Considerando la forma biquadratica

$$f = 4\,x_1^3 x_2 - g_2 x_1 x_2^3 - g_3 x_2^4,$$

per la quale sono g_2, g_3 i due invarianti, ed

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad t = 2(fh)$$

i due covarianti, si ha come è noto:

$$t^2 = -4\,h^3 + g_2 h f^2 - g_3 f^3. \tag{1}$$

Posto $x_1 = x$, $x_2 = 1$ ed $f' = \dfrac{df}{dx}$, inoltre:

$$k = xf + h,$$

saranno:

$$k = 3\,xf - \tfrac{1}{16}f'^2, \qquad t = \tfrac{1}{2}f'k - f^2. \tag{2}$$

Si indichino con e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $f = 0$, e si considerino le tre

espressioni *)

(3) $$y_r = (x - e_r)^2 - m_r, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

nelle quali:

$$m_r = 3e_r^2 - \tfrac{1}{4}g_2 = (e_r - e_s)(e_r - e_t).$$

Dimostrasi facilmente essere

$$y_r^2 = -(h + e_r f),$$

e quindi per la (1) sarà:

$$t = 2y_1 y_2 y_3.$$

La somma delle tre quantità y_r conduce alla

$$y_1 + y_2 + y_3 = \tfrac{1}{4}f',$$

ed essendo

$$y_2 y_3 = (x - e_1)f - \tfrac{1}{4}f' y_1,$$

$$y_3 y_1 = (x - e_2)f - \tfrac{1}{4}f' y_2,$$

$$y_1 y_2 = (x - e_3)f - \tfrac{1}{4}f' y_3,$$

si otterrà la terza relazione:

$$y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 = k,$$

ed infine per la seconda delle (2):

$$\tfrac{1}{2}f^2 = (y_1 + y_2 + y_3)(y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) - y_1 y_2 y_3,$$

la quale può anche dedursi dalle

$$y_2^2 y_3 + y_3^2 y_1 + y_1^2 y_2 = \tfrac{1}{4}f^2 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\delta^{\frac{1}{2}} f,$$

$$y_2 y_3^2 + y_3 y_1^2 + y_1 y_2^2 = \tfrac{1}{4}f^2 - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\delta^{\frac{1}{2}} f,$$

essendo $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

2. Indichiamo con D il simbolo d'operazione

$$D = 12g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

*) Posto $\varphi_r = (x_1 - e_s x_2)(x_1 - e_t x_2)$, $\psi_r = 4x_2(x_1 - e_r x_2)$, sicchè $f = \varphi_r \psi_r$, si ha: $y_r = (\varphi_r \psi_r)$.

pel quale, come è noto, si ha:

$$D(e_r) = 4\, e_r^2 - \tfrac{2}{3} g_2.$$

Operando sulle tre quantità y_1, y_2, y_3, si ottengono le tre seguenti relazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} D(y_1) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) y_1' + 4\,x\,y_1 + f, \\ D(y_2) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) y_2' + 4\,x\,y_2 + f, \\ D(y_3) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) y_3' + 4\,x\,y_3 + f, \end{cases}$$

dalle quali indicando con $F(y_1, y_2, y_3)$ una funzione omogenea dell'ordine m di y_1, y_2, y_3, si deduce la

$$(5) \qquad D(F) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) F' + 4\,m\,x\,F + f\,P(F),$$

essendo

$$P = \frac{\partial F}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial y_3} \qquad \left(y_r' = \frac{d y_r}{d x},\ F' = \frac{d F}{d x}\right).$$

Applichiamo quest'ultimo risultato ai due casi di $F = k$, $F = t$. Nel primo si avrà:

$$D(k) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) k' + 8\,x\,k + \tfrac{1}{2} f f',$$

ma, siccome $k' = 3\,f$, $k'' = 3\,f'$, si ha che

$$\tfrac{1}{2} f' k' + f k'' = \tfrac{9}{2} f f',$$

il quale valore sostituito nell'ultima relazione conduce alla

$$(6) \qquad 3^2 D(k) = -\,3^2\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) k' + 3^2(3^2 - 1)\,x\,k + \tfrac{1}{2} f' k' + f k''.$$

Analogamente, se $F = t$, si ha:

$$D(t) = -\left(4\,x^2 - \tfrac{2}{3} g_2\right) t' + 12\,x\,t + 2\,f\,k.$$

Ma osservando che

$$t' = 12\,x\,k - \tfrac{1}{2} f f', \qquad t'' = 20\,k,$$

e quindi per le (2):

$$f' t' = 24\,x\,t + 8\,f\,k,$$

si ottiene la

$$\tfrac{3}{2} f' t' + f t'' - 36\,x\,t = 32\,f\,k,$$

e quindi:

$$(7)\qquad 4^2 D(t) = -4^2\left(4x^2 - \tfrac{2}{3}g_2\right)t' + (4^2-3)(4^2-4)xt + \tfrac{1}{2}f't' + ft''.$$

Le relazioni (6), (7) sono i due tipi di equazioni differenziali alle quali soddisfano alcune speciali funzioni $F(y_1, y_2, y_3)$, equazioni che deduconsi dalla (5) tenendo presenti i tipi superiori.

Sia dapprima n un numero dispari, ed F una forma ternaria dell'ordine $m = \frac{n^2-1}{4}$; dalla (5) si deduce:

$$(8)\qquad n^2 D(F) = -n^2\left(4x^2 - \tfrac{2}{3}g_2\right)F' + n^2(n^2-1)xF + \tfrac{1}{2}f'F' + fF'',$$

per le forme F che soddisfano alla

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}f'F' + fF'' = n^2 f P(F),$$

e pel caso di n pari ed $m = \frac{n^2-4}{4}$, sarà:

$$(10)\quad n^2 D(F) = -n^2\left(4x^2 - \tfrac{2}{3}g_2\right)F' + (n^2-3)(n^2-4)xF + \tfrac{1}{2}f'F' + fF'',$$

per le forme F le quali soddisfano alla

$$(11)\qquad \tfrac{1}{2}f'F' + fF'' - 3(n^2-4)xF = n^2 f P(F).$$

Le forme ternarie $F(y_1, y_2, y_3)$ oltre le proprietà generali delle funzioni omogenee, hanno per la loro origine le seguenti proprietà speciali. Posto

$$Q(F) = y_1^2\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2^2\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_3^2\frac{\partial F}{\partial y_3},$$

$$R(F) = y_2 y_3\frac{\partial F}{\partial y_1} + y_3 y_1\frac{\partial F}{\partial y_2} + y_1 y_2\frac{\partial F}{\partial y_3},$$

essendo, per quanto si è dimostrato precedentemente:

$$y_1^2 = \tfrac{1}{2}fy_1' - k, \qquad y_2 y_3 = \tfrac{1}{2}fy_1' - \tfrac{1}{4}f'y_1,$$

si hanno le

$$Q(F) + kP(F) = \frac{1}{2}fF', \qquad R(F) = \frac{1}{2}fF' - \frac{m}{4}f'F,$$

supposto m l'ordine di F. Per queste relazioni le equazioni (9), (11) diventano:

$$2fS'(F) - f'S(F) = n^2 f^2 P(F), \qquad (n \text{ dispari}),$$

$$2fR'(F) + \frac{n^2}{4} f'S(F) = n^2 f^2 P(F), \qquad (n \text{ pari}),$$

essendo $S(F) = Q(F) + kP(F)$.

Sia $F = f^2 t - k^3$, si hanno con breve calcolazione le due:

$$\tfrac{1}{2} f' F' - 5 f P(F) = -10 f k t,$$

$$f F'' - 20 f P(F) = 10 f k t,$$

ed essendo nel caso attuale $n = 5$, la relazione (9) è soddisfatta.

Così, supponendo $F = k(f^2 t - k^3 - t^2)$, si ottengono le

$$\tfrac{3}{2} f' F' - 72 x F = 9 f^3 f' t - 18 f^3 k^2 - 66 f k^2 t + 6 k^3 t',$$

$$f F'' - 24 x F = 27 f^3 f' t - 54 f^3 k^2 - 78 f k^2 t - 6 k^3 t',$$

$$P(F) = f^2 f' t - 2 f^2 k^2 - 4 k^2 t,$$

le quali soddisfano la (11) essendo $n = 6$.

Concludendo: *tutte le forme ternarie $F(y_1, y_2, y_3)$ soddisfano alla equazione differenziale* (5); *alcune fra esse soddisfano altresì alla* (9) *e quindi alla* (8); *altre soddisfano alla* (11) *ed in conseguenza alla* (10).

3. Le equazioni differenziali (8), (10) alle quali abbiamo nel paragrafo precedente assegnata una nuova origine, corrispondono alla nota equazione differenziale di JACOBI pel caso della moltiplicazione, e si trovano nel *Traité des fonctions elliptiques* di HALPHEN [t. I (Paris, 1886), pp. 328-329].

Ne deriva che ciascuna delle funzioni indicate da lui colla lettera ψ_n è una forma ternaria di y_1, y_2, y_3. Si hanno cioè le

$$\psi_3 = k, \qquad \psi_5 = f^2 t - k^3, \quad \psi_7 = f^2 t k^3 - k^6 - t^2, \quad \ldots$$

$$\psi_2 = -f^{\frac{1}{2}}, \quad \psi_4 = -f^{\frac{1}{2}} t, \quad \psi_6 = -f^{\frac{1}{2}} k(f^2 t - k^3 - t^2), \quad \ldots$$

e così via; supponendo $x = \wp(u)$. Le funzioni y_1, y_2, y_3 possono esprimersi per mezzo delle $\sigma(u)$, $\sigma(\omega)$ colle formole date dal medesimo Autore alla pag. 191 o con quelle che si trovano negli art.i 15-22 delle *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* di SCHWARZ (Göttingen, 1885).

4. La calcolazione dei polinomi ψ_n può eseguirsi o collo sviluppo della loro espressione sotto forma di determinante *), o colla determinazione dei coefficienti del polinomio per mezzo delle equazioni differenziali superiori; ma sia l'uno che l'altro metodo già per le funzioni di indice n dei primi gradi esigono lunghi calcoli. A questi si può ovviare col metodo seguente.

Ponendo nella

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3-\gamma_2\xi-\gamma_3}}=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

le $\xi=\mu^2 y$, $\gamma_2=\mu^4 g_2$, $\gamma_3=\mu^6 g_3$, la equazione differenziale superiore si trasforma nella

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}=\frac{\mu\, dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

Se $\mu=n$ numero dispari, si ha:

$$y=\frac{U}{n^2V^2}, \tag{12}$$

essendo $V=\frac{1}{n}\psi_n$ ed

$$U=n^2xV^2-\tfrac{1}{2}f'VV'-f(VV''-V'^2). \tag{13}$$

Il polinomio V è del grado $\frac{n^2-1}{2}$ ed indicando con S_m la somma delle potenze emmesime delle radici della equazione $V=0$, dalle superiori (12), (13) deducesi la

$$y=x+\frac{1}{n^2}\left(f\sum_1^\infty\frac{mS_{m-1}}{x^{m+1}}-\frac{1}{2}f'\sum_1^\infty\frac{S_{m-1}}{x^m}\right). \tag{14}$$

Vedesi facilmente che, essendo

$$S_0=\frac{n^2-1}{2},\qquad S_1=0,$$

il termine costante nel secondo membro della equazione (14) è nullo, e che il coefficiente di x è eguale a $\frac{1}{n^2}$. La (14) si trasforma quindi nella

$$y=\frac{1}{n^2}\left(x+\sum_1^\infty\frac{r_m}{x^m}\right), \tag{15}$$

*) Queste espressioni furono date da me per la prima volta in una comunicazione del 7 novembre 1864 all'Accademia delle Scienze di Parigi: *Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques* [Comptes rendus etc., t. LIX (1864), pp. 769-775]. Sotto altra forma trovansi nelle *Formeln und Lehrsätze*, etc. di SCHWARZ, nel *Traité des fonctions elliptiques* di HALPHEN ed in altri lavori.

posto:

$$(16) \qquad r_m = 2(2m+1)S_{m+1} - \tfrac{1}{2}(2m-1)g_2 S_{m-1} - (m-1)g_3 S_{m-2},$$

e siccome i valori di r_1, r_2 in funzione di g_2, g_3 si ottengono da note relazioni, e quelli di $r_3, r_4, \ldots$ sono funzioni di questi, dalla relazione (16) si deducono quelli di $S_2, S_3, \ldots$.

Essendo

$$n^2 f(y) = y'^2 f(x),$$

sostituendo nella medesima per y la espressione (15) ed eguagliando nei due membri i termini costanti, trovasi:

$$\frac{12 r_2}{n^4} - n^2 g_3 = -\frac{1}{n^4}(g_3 + 16 r_2),$$

dalla quale:

$$r_2 = \frac{n^6 - 1}{4 \cdot 7} g_3.$$

Eseguendo la stessa operazione sulla

$$n^2 f'(y) = 2y'' f(x) + y' f'(x),$$

si ha:

$$\frac{24 r_1}{n^2} - n^2 g_2 = \frac{16 r_1}{n^2} - \frac{12 r_1}{n^2} - \frac{g_2}{n^2},$$

e quindi:

$$r_1 = \frac{n^4 - 1}{4 \cdot 5} g_2.$$

Infine dalla

$$n^2 f''(y) y' = 2y''' f(x) + 3y'' f'(x) + y' f''(x)$$

si ottengono le due relazioni *):

$$(17) \left\{ \begin{aligned} &(2m-1)\left[(4m+5)r_{2m+1} - \frac{1}{4}(4m-1)g_2 r_{2m-1} - (m-1)g_3 r_{2m-2}\right] \\ &\qquad\qquad - 3r_m^2 - 6\sum_1^m {}_s\, r_{m-s} r_{m+s} = 0, \\ &m\left[(4m+7)r_{2m+2} - \frac{1}{4}(4m+1)g_2 r_{2m} - \frac{1}{2}(2m-1)g_3 r_{2m-1}\right] \\ &\qquad\qquad - 3\sum_1^m {}_s\, r_{m-s+1} r_{m+s} = 0, \end{aligned} \right.$$

---

*) Vedi una mia comunicazione alla R. Accademia dei Lincei del settembre 1893: *Sulle equazioni modulari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. V, t. II (1893, 2° sem.), pp. 185-192].

la prima delle quali dà i valori di $r_3, r_5, \ldots$; e la seconda di $r_4, r_6, \ldots$ in funzione di r_1, r_2.

Pei valori di r_1, r_2 si deducono dalla equazione (16) quelli di S_2, S_3, ossia:

$$S_2 = \frac{(n^2-1)(n^2+6)}{4.5.6} g_2, \qquad S_3 = \frac{(n^2-1)(n^4+n^2+15)}{5.7.8} g_3;$$

ma per le (17):

$$r_3 = \frac{(n^4-1)(n^4+4)}{3.4^2.5^2} g_2^2,$$

$$r_4 = \frac{n^2-1}{4^2.5.7.11}(3n^8+3n^6+25n^4+36n^2+36) g_2 g_3,$$

$$r_5 = \frac{n^4-1}{3.4^3.5^3.13}(n^4+4)(2n^4+33) g_2^3 + \frac{(n^6-1)(n^6+27)}{4^2.7^2.13} g_3^2,$$

e per la (16):

$$14 S_4 = r_3 + \tfrac{5}{2} g_2 S_2, \qquad 18 S_5 = r_4 + \tfrac{7}{2} g_2 S_3 + 3 g_3 S_2,$$

$$22 S_6 = r_5 + \tfrac{9}{2} g_2 S_4 + 4 g_3 S_3,$$

e così di seguito si calcoleranno i valori delle somme S_r. Sarà quindi:

$$\frac{1}{n}\psi_n = x^{\frac{n^2-1}{2}} - \frac{(n^2-1)(n^2+6)}{3.4^2.5} g_2 x^{\frac{n^2-5}{2}} - \frac{(n^2-1)(n^4+n^2+15)}{3.5.7.8} g_3 x^{\frac{n^2-7}{2}}$$

$$- \frac{(n^2-1)(n^6-13n^4+36n^2+420)}{2.3^2.4^4.5.7} g_2^2 x^{\frac{n^2-9}{2}} + \ldots .$$

Pel caso di n pari le formole superiori rimangono le stesse, salvo che nel secondo membro della equazione (16) devesi aggiungere il trinomio

$$m_1 e_1^{m-1} + m_2 e_2^{m-1} + m_3 e_3^{m-1},$$

ponendo $S_0 = \dfrac{n^2-4}{2}$; e quindi:

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = \frac{1}{4.5.6}(n^4+5n^2-36) g_2,$$

$$S_3 = \frac{1}{5.7.8}(n^6+14n^2-120) g_3, \qquad \ldots .$$

5. Le formole da me date nel 1864 come espressione di ψ_n sotto forma di determinante pongono in evidenza alcune funzioni che meritano essere considerate. Posto $\varphi = f^{\frac{1}{2}}$, si calcolino le derivate:

$$a_0 = -\frac{1}{2}\varphi', \quad a_1 = \frac{1}{4}\varphi'', \quad a_2 = -\frac{1}{3\cdot 4}\varphi''', \quad a_3 = \frac{1}{3\cdot 4^2}\varphi^{IV}, \ldots,$$

in generale:

$$a_{r+1} = -\frac{a'_r}{r+2},$$

e sia:

$$\alpha_r = f^{\frac{2r+1}{2}} a_r;$$

le formole sopra citate dànno le

$$\psi_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\frac{n-1}{2}} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{\frac{n+1}{2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\frac{n-1}{2}} & \alpha_{\frac{n+1}{2}} & \ldots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}, \qquad \psi_n = -f^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{\frac{n}{2}+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\frac{n}{2}} & \alpha_{\frac{n}{2}+1} & \ldots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix},$$

essendo: nella prima $n = 3, 5, 7, \ldots$, nella seconda $n = 4, 6, \ldots$.

Le funzioni alle quali accennammo sopra sono gli elementi di cui si compongono questi determinanti, e cioè:

$$\alpha_1 = k, \quad \alpha_2 = t, \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{2} f' t - k^2, \quad \alpha_4 = \tfrac{1}{4} f'^2 t - f^2 k - 3tk,$$

$$\alpha_5 = 14(k^2 t - k^3 - t^2) - \delta f^2, \quad \ldots \quad (\delta = g_2^3 - 27 g_3^2),$$

deducibili l'uno dall'altro colla operazione:

$$(r+2)\alpha_{r+1} = \frac{2r+1}{2} f' \alpha_r - f \alpha'_r.$$

Le funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$ dei gradi $4, 6, 8, \ldots 2(r+1)$ in x, sono evidentemente forme ternarie di y_1, y_2, y_3 degli ordini $2, 3, 4, \ldots r+1$. Se inoltre, supponendo r dispari, poniamo:

$$x = \frac{2}{r-1}\left\{\varphi\left(\frac{2\omega}{r}\right) + \varphi\left(\frac{4\omega}{r}\right) + \cdots + \varphi\left[\frac{(r-1)\omega}{r}\right]\right\},$$

la equazione modulare corrispondente del grado $r+1$, nella ipotesi di $\delta=0$, è la

$$\alpha_{\frac{r-1}{2}}=0,$$

questa equazione cioè corrisponde a quella rappresentata da HALPHEN nel Capitolo 2° della terza parte della sua opera (pag. 101) col simbolo:

$$[x-r\gamma][x+\gamma]^r=0.$$

Le note equazioni modulari per le trasformazioni degli ordini 3, 5, 7 sono le

$$\alpha_1=0, \qquad \alpha_2=\frac{1}{2.4^2}\delta, \qquad \alpha_3=\frac{\delta}{3^5}\left(86x^2-\frac{9}{2}g_2\right),$$

ossia le

$$y_2y_3+y_3y_1+y_1y_2=0, \qquad y_1y_2y_3=\frac{1}{4^3}\delta,$$

$$y_2^2y_3^2+y_3^2y_1^2+y_1^2y_2^2-2y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3)=-\frac{\delta}{3^5}\left(86x^2-\frac{9}{2}g_2\right).$$

Osserveremo da ultimo che, sempre nella ipotesi $\delta=0$, si ha:

$$\alpha_r''=4(2r+1)(2r-3)\alpha_{r-2},$$

e che δ può esprimersi come segue:

$$\delta=5f^2+32t-12xt'.$$

6. È noto che il modulo k delle funzioni ellittiche di JACOBI è determinato dalla equazione:

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \qquad k_1^2=1-k^2=\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

e quindi, posto $\rho=e_1-e_3$, si ottengono le

$$\rho k_1=\sqrt{m_1}, \qquad \rho k k_1=i\sqrt{m_2}, \qquad \rho k=\sqrt{m_3},$$

nelle quali m_1, m_2, m_3 hanno i valori del n° 1; sarà così:

$$\rho^3k^2k_1^2=-\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Rammentando il valore dell'invariante assoluto

$$\frac{g_2^3}{\delta}=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2k_1^2)^3}{k^4k_1^4},$$

si ha che il simbolo di operazione D si trasforma nel modo seguente:

$$D = 2\rho k(\alpha^2 - 4)\frac{d}{d\alpha}, \tag{18}$$

posto $\alpha = \frac{1+k^2}{k}$.

Sieno $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ le radici della equazione $4\sigma^3 - \gamma_2\sigma - \gamma_3 = 0$ per una trasformazione d'ordine n della

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{4\sigma^3 - \gamma_2\sigma - \gamma_3}} = \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}, \tag{19}$$

si avranno pei moduli λ, λ_1, le

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \qquad \lambda_1^2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

e per una nota trasformazione essendo

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{(k\xi^2 - 1)(\xi^2 - k)}}, \tag{20}$$

si avrà pel moltiplicatore μ:

$$\mu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3}}.$$

Sia come nel precedente paragrafo:

$$x = \frac{2}{n-1}\left\{\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right) + \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right) + \cdots + \wp\left[\frac{(n-1)\omega}{n}\right]\right\}, \tag{21}$$

si hanno le

$$nD(\varepsilon_r) = 4\varepsilon_r^2 - \tfrac{2}{3}\gamma_2 - 4(n-1)\varepsilon_r x, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

da cui:

$$nD[\log(\varepsilon_r - \varepsilon_s)] = -4[\varepsilon_t + (n-1)x],$$

ed in conseguenza, se $\Delta = \gamma_2^3 - 27\gamma_3^2$,

$$x = -\frac{n}{24(n-1)} D(\log \Delta).$$

Pongasi

$$z^3 = \mu\sqrt{\mu\frac{\lambda\lambda_1}{kk_1}}, \tag{22}$$

si avrà pei valori superiori:

$$z^{24} = \frac{\Delta}{\delta} \quad \text{ed} \quad x = -\frac{n}{n-1} D(\log z). \tag{22'}$$

Il secondo membro della equazione (22) è noto essere uno dei coefficienti delle formole di trasformazione di Jacobi, coefficiente da lui indicato colla lettera $B_{\frac{n-1}{2}}$. La formola (18) condurrà così alla

$$3\zeta^2 D(\zeta) = 2\rho k(\alpha^2 - 4)\frac{dB_{\frac{n-1}{2}}}{d\alpha},$$

e siccome, per la equazione differenziale pure dovuta a Jacobi:

$$2n(\alpha^2 - 4)\frac{dB_{\frac{n-1}{2}}}{d\alpha} = (n-1)\alpha B_{\frac{n-1}{2}} + 6B_{\frac{n-3}{2}},$$

essendo $B_{\frac{n-3}{2}}$ un altro dei coefficienti di quelle formole di trasformazione, osservando essere $\rho k\alpha = -3e_3$, si giunge alla

$$x - e_3 = q\sqrt{m_3}, \tag{23}$$

posto:

$$qB_{\frac{n-1}{2}} = -\frac{2}{n-1}B_{\frac{n-3}{2}}.$$

Per questa relazione le quantità y_1, y_2, y_3 date dalle (3) diventano:

$$y_1 = \frac{m_1 k}{k_1^2}(kq^2 - 2q + k),$$

$$y_2 = -\frac{m_2}{k_1^2}(q^2 - 2kq + 1),$$

$$y_3 = m_3(q^2 - 1),$$

ed in conseguenza:

$$\sum y = m_3(3q^2 - 2\alpha q + 1),$$

$$\sum y_2 y_3 = m_3^2(3q^4 - 4\alpha q^3 + 6q^2 - 1),$$

$$y_1 y_2 y_3 = m_3^3(q^2 - 1)(q^4 - 2\alpha q^3 + 6q^2 - 2\alpha q + 1),$$

da cui le note equazioni modulari Jacobiane.

La relazione (23) è una delle $\frac{n-1}{2}$ relazioni esistenti fra i coefficienti B delle trasformazioni Jacobiane ed i coefficienti della trasformazione corrispondente alla equa-

zione differenziale (19). Per questa si ha, come è noto:

$$\sigma = \frac{U(s)}{T^2(s)},$$

essendo $T(s)$ un polinomio del grado $\frac{n-1}{2}$:

$$T(s) = s^{\frac{n-1}{2}} + a_1 s^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}},$$

ed $a_1 = -\frac{n-1}{2}x$. Ora dalle tre relazioni *)

$$(\sqrt{m_1})^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{e_2 - e_3}\right)^{\frac{1}{4}} = \chi^3 T(e_1),$$

$$(i\sqrt{m_2})^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{e_1 - e_3}\right)^{\frac{1}{4}} = \chi^3 T(e_2),$$

$$(\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{e_1 - e_2}\right)^{\frac{1}{4}} = \chi^3 T(e_3),$$

si deducono le

$$(24) \qquad \begin{cases} (\sqrt{m_1})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu \frac{\lambda}{k}} = \chi^3 T(e_1), \qquad (i\sqrt{m_2})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu} = \chi^3 T(e_2), \\ (\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\mu \frac{\lambda_1}{k_1}} = \chi^3 T(e_3), \end{cases}$$

e da queste le

$$(25) \qquad \sqrt{\lambda k} = k^{\frac{n+1}{2}} \frac{T(e_1)}{T(e_2)}, \qquad \sqrt{\lambda_1 k_1} = k_1^{\frac{n+1}{2}} \frac{T(e_3)}{T(e_2)};$$

ma, siccome è noto:

$$B = \sqrt{\mu \frac{\lambda_1}{k_1}};$$

quindi:

$$m_3^{\frac{n-1}{4}} B = \chi^3 T(e_3),$$

*) Queste relazioni si trovano in una mia comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi: *Sur une classe d'équations modulaires* [Comptes rendus, etc., t. CXII (1891), pp. 28-32].

e da questa, colla consecutiva applicazione della operazione (18), si ottengono le

$$m_3^{\frac{n-3}{4}} B_1 = \chi^3 T'(e_3)$$

$$m_3^{\frac{n-5}{4}} B_2 = \frac{1}{2} \chi^3 T''(e_3)$$

. . . .

$$m_3^{\frac{n-2r-1}{4}} B_r = \frac{1}{1.2 \ldots r} \chi^3 T^{(r)}(e_3),$$

dove le $T'(e_3)$, $T''(e_3)$, ... sono le derivate del polinomio $T(s)$ in cui siasi ad s sostituito e_3. Per $r = \frac{n-3}{2}$ si ritorna alla relazione (23).

Si sono così espressi tutti i coefficienti delle trasformazioni Jacobiane in funzione di χ e del polinomio $T(s)$ e sue derivate, nelle quali ad s siasi sostituita la radice e_3.

Per questi valori il polinomio denominatore della trasformazione di JACOBI

$$V(\xi^2) = B + B_1 \xi^2 + B_2 \xi^4 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}} \xi^{n-1},$$

essendo $\xi^2 = \frac{s - e_3}{\sqrt{m_3}}$, diventa:

$$(\sqrt{m_3})^{\frac{n-1}{2}} V(\xi^2) = \chi^3 T(s),$$

e siccome a $\xi = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\xi = \sqrt{k}$, $\xi = 0$ corrispondono $s = e_1, e_2, e_3$, si ritrovano le equazioni (24).

7. Posto

$$\left\{ \begin{aligned} \rho N_1 &= n e_1 - \varepsilon_1 + 2 a_1, \\ \rho N_2 &= n e_2 - \varepsilon_2 + 2 a_1, \\ \rho N_3 &= n e_3 - \varepsilon_3 + 2 a_1, \end{aligned} \right. \tag{26}$$

rammentando essere $a_1 = -\frac{n-1}{2} x$, dalle equazioni

$$n D[\log(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)] = 4(2 a_1 - \varepsilon_1),$$

$$D[\log(e_2 - e_3)] = -4 e_1,$$

deducesi la

$$\rho N_1 = n D\left[\log\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{e_2 - e_3}\right)^{\frac{1}{4}}\right],$$

ed analogamente per N_2, N_3; ma deducesi facilmente dalla (18) che

$$D(t) = -2\rho k k_1^2 \frac{dt}{dk},$$

si avranno quindi le

$$(27)\qquad \begin{cases} N_1 = -n k k_1^2 \dfrac{d}{dk}\left(\log\dfrac{\mu\lambda}{k}\right), \qquad N_2 = -n k k_1^2 \dfrac{d}{dk}(\log\mu), \\ N_3 = -n k k_1^2 \dfrac{d}{dk}\left(\log\dfrac{\mu\lambda_1}{k_1}\right), \end{cases}$$

od anche:

$$(28)\qquad \rho N_1 = 2m_1\frac{T'(e_1)}{T(e_1)}, \qquad \rho N_2 = 2m_2\frac{T'(e_2)}{T(e_2)}, \qquad \rho N_3 = 2m_3\frac{T'(e_3)}{T(e_3)}.$$

La quantità qui denominata N_3 è la stessa che il sig. HERMITE ha introdotto, indicandola con N, nella teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche *).

Sommando le (26) si ha:

$$a_1 = \tfrac{1}{6}\rho(N_1 + N_2 + N_3),$$

ossia per le (27):

$$a_1 = -\tfrac{1}{6} n\rho k k_1^2 \frac{d}{dk}\left(\log\mu^3\frac{\lambda\lambda_1}{k k_1}\right) = \frac{n}{2} D(\log z),$$

come alla (22').

Le relazioni (26), le quali si ottengono anche dalla formola di trasformazione

$$\sigma = \frac{U(s)}{T^2(s)},$$

conducono alle equazioni modulari per N_1, N_2, N_3. Supponendo $n = 3$, queste equazioni sono:

*) HERMITE, *Sur la transformation des fonctions elliptiques* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VI (1892)].

$$\left(\frac{N_1}{2k_1}\right)^4 - 6\left(\frac{N_1}{2k_1}\right)^2 + 4\,\frac{1+k_1^2}{k_1}\left(\frac{N_1}{2k_1}\right) - 3 = 0,$$

$$\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right)^4 + 6\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right)^2 - 4\,\frac{k^2-k_1^2}{kk_1}\left(\frac{N_2}{2kk_1}\right) - 3 = 0,$$

$$\left(\frac{N_3}{2k}\right)^4 - 6\left(\frac{N_3}{2k}\right)^2 + 4\,\frac{1+k^2}{k}\left(\frac{N_3}{2k}\right) - 3 = 0,$$

l'ultima delle quali già trovasi nello scritto dell'eminente analista sopra nominato.

Notiamo da ultimo che le quantità N_1, N_2, N_3 ponno anche esprimersi col polinomio $V(\xi^2)$ nel modo seguente:

$$N_1 = 2\frac{k_1^2}{k}\,\frac{V'\left(\frac{1}{k}\right)}{V\left(\frac{1}{k}\right)}, \qquad N_2 = -\,2kk_1^2\,\frac{V'(k)}{V(k)}, \qquad N_3 = 2k\,\frac{V'(0)}{V(0)},$$

e che al valore di N del sig. HERMITE si giunge facendo uso delle note relazioni *):

$$K = \omega_1\sqrt{\rho}, \qquad iK' = \omega_3\sqrt{\rho},$$

$$I = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\eta_1 + e_1\omega_1), \qquad iI' = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\eta_3 + e_3\omega_3),$$

essendo come sopra $\rho = e_1 - e_3$.

8. Dalle equazioni (25), posto

$$P = k\lambda + k_1\lambda_1 - 1, \qquad P_1 = \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k_1\lambda_1} - 1, \qquad P_2 = \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k_1\lambda_1} - 1,$$

si deducono le seguenti:

per $\frac{n+1}{2}$ dispari, $\quad P(e_1-e_3)^{\frac{n+1}{2}}\,T^2(e_2) = \sum (e_2-e_3)^{\frac{n+1}{2}}\,T^2(e_1)$,

» $\frac{n+1}{4}$ » $\quad P_1(e_1-e_3)^{\frac{n+1}{4}}\,T(e_2) = \sum (e_2-e_3)^{\frac{n+1}{4}}\,T(e_1)$,

» $\frac{n+1}{8}$ » $\quad P_2(e_1-e_3)^{\frac{n+1}{8}}\,T^{\frac{1}{2}}(e_2) = \sum (e_2-e_3)^{\frac{n+1}{8}}\,T^{\frac{1}{2}}(e_1)$.

Suppongasi per esempio $n = 3$; il secondo membro della seconda delle relazioni superiori diventa:

$$(e_2-e_3)\,T(e_1) + (e_3-e_1)\,T(e_2) + (e_1-e_2)\,T(e_3),$$

*) SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (Göttingen, 1885), pag. 32 e 34.

di cui il valore è nullo essendo $T(s) = s + a_1$; quindi:

$$P_1 = 0.$$

Così, se $n = 7$, essendo $T(s) = (\lambda e + \mu)^2$ *), la terza relazione dà:

$$P_2 = 0.$$

Sieno

$$R = k\lambda k_1\lambda_1, \qquad R_1 = \sqrt{k\lambda k_1\lambda_1}, \qquad R_2 = \sqrt[4]{k\lambda k_1\lambda_1},$$

si avranno le

per $\frac{n+1}{2}$ dispari, $\quad R(e_1 - e_3)^{\frac{3(n+1)}{2}} T^6(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{4}}}{2^{n+1}} \Pi\, T^2(e),$

» $\frac{n+1}{4}$ » $\quad R_1(e_1 - e_3)^{\frac{3(n+1)}{4}} T^3(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{8}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} \Pi\, T(e),$

» $\frac{n+1}{8}$ » $\quad R_2(e_1 - e_3)^{\frac{3(n+1)}{8}} T^{\frac{3}{2}}(e_2) = -\frac{\delta^{\frac{n+1}{16}}}{2^{\frac{n+1}{4}}} \Pi\, T^{\frac{1}{2}}(e).$

Suppongansi $n = 5$, $n = 11$, $n = 23$; siccome è noto **) le equazioni modulari corrispondenti sono:

$$P^3 + 32 R = 0, \qquad P_1^3 - 16 R_1 = 0, \qquad P_2^3 + 4 R_2 = 0,$$

e quindi pei tre casi:

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum (e_2 - e_3)^3 T^2(e_1) = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} \Pi\, T^{\frac{2}{3}}(e) = \frac{\delta^{\frac{7}{6}}}{8\zeta^4}, \\ &\sum (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}} \Pi\, T^{\frac{1}{3}}(e) = -\frac{\delta^{\frac{4}{3}}}{4^2\zeta^2}, \\ &\sum (e_2 - e_3)^3 T^{\frac{1}{2}}(e_1) = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{2}{3}}} \Pi\, T^{\frac{1}{6}}(e) = \frac{\delta^{\frac{17}{12}}}{2^5\zeta}, \end{aligned} \right.$$

*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. III (Paris, 1891), pag. 47.

**) R. Russell, *On* $\varkappa\lambda - \varkappa'\lambda'$ *Modular Equations* [Proceedings of the London Mathematical Society (Read Nov. 10th, 1887), t. XIX (1889), pp. 90-111].

essendo per le (22) e (24):

$$\zeta^6 \Pi\, T(e) = \frac{\delta^{\frac{n-1}{4}}}{2^{n-1}}.$$

Consideriamo in modo speciale il caso di $n = 11$. Il polinomio $T(s)$ sarà del quinto grado, e quindi

$$T(s) = s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5,$$

od anche:

$$T(s) = \tfrac{1}{4} f(s)\left[s^2 + a_1 s + a_2 + \tfrac{1}{4} g_2\right] + A s^2 + 2 B s + C,$$

posto:

$$A = a_3 + \tfrac{1}{4} g_2 a_1 + \tfrac{1}{4} g_3, \qquad C = a_5 + \tfrac{1}{4} g_3 a_2 + \tfrac{1}{16} g_2 g_3,$$

$$2 B = a_4 + \tfrac{1}{4} g_2 a_2 + \tfrac{1}{4} g_3 a_1 + \tfrac{1}{16} g_2^2.$$

Si formino colle A, B, C le tre quantità

$$H = C - \tfrac{1}{12} g_2 A, \qquad L = 3 g_3 A - 2 g_2 B, \qquad M = 3 g_3 B - 2 g_2 C,$$

si hanno tosto le

$$\sum (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \tfrac{3}{4} \delta^{\frac{1}{2}} H,$$

$$\sum e_1 (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \tfrac{1}{16} \delta^{\frac{1}{2}} L,$$

$$\sum e_1^2 (e_2 - e_3)^3 T(e_1) = \delta^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{3}{16} g_2 H + \tfrac{1}{8} M\right),$$

e quindi per la seconda delle (29), sarà:

$$12 H = -\frac{\delta^{\frac{5}{6}}}{\zeta^2}. \tag{30}$$

Si indichino con x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 le radici della equazione $T(s) = 0$, si otterrà da una nota relazione *) essere:

$$12 H = (x_0 - x_1)(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)(x_2 - x_4)(x_4 - x_0);$$

ma d'altra parte dimostrasi, facendo uso di alcune formole contenute nel mio lavoro

*) Kiepert, *Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXVII (1879), pp. 199-216].

già citato: *Sulle equazioni modulari* *) che:

$$-12H = (x_0 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_4)(x_4 - x_3)(x_3 - x_0),$$

sarà quindi H, salvo un coefficiente numerico, eguale alla radice quarta del discriminante della equazione $T(s) = 0$.

Rammentando la formola dimostrata più addietro:

$$a_1 = \frac{n}{2} D(\log z),$$

dalla relazione (30) deducesi la

$$11\, D(H) + 4 a_1 H = 0.$$

Ma operando direttamente col simbolo D sul valore di H, mediante la nota formola:

$$n D(a_r) = 2(r+1)(2r+3) a_{r+1} - 6 a_1 a_r + \tfrac{1}{12}(n - 2r + 1)(n + 6r) g_2 a_{r-1}$$
$$- \tfrac{1}{4}(n - 2r + 1)(n - 2r + 3) g_3 a_{r-2},$$

si ottiene la

$$11\, D(H) = -6 a_1 H - \tfrac{5}{6} L - \tfrac{1}{24}\delta,$$

da cui:

$$12 a_1 H + 5 L + \tfrac{1}{4}\delta = 0.$$

Analogamente dalle relazioni

$$11\, D(L) = -6 a_1 L + 2 g_2 H + 7.8 M - \tfrac{1}{2}\delta a_1,$$
$$11\, D(M) = -6 a_1 M - 9.11 g_3 H + \tfrac{8}{3} g_2 L - \tfrac{1}{4}\delta\left(a_2 + \tfrac{1}{4} g_2\right),$$

se ne dedurranno altre fra le H, L, M.

Gennajo 1895.

[Pa.], [G.].

---

*) Vedi anche A. G. Greenhill, *Pseudo-Elliptic Integrals and their Dynamical Applications* [Proceedings of the London Mathematical Society (Read June 8th, 1893), t. XXV (1894), pp. 195-304].

XCVIII.

LA MOLTIPLICAZIONE COMPLESSA PER $\sqrt{-23}$ DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIV (1896), pp. 335-338.

1. È noto come HALPHEN nella sua Memoria sopra questo argomento pubblicata dapprima nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* e riprodotta nel suo *Traité des fonctions elliptiques* *), faccia dipendere la soluzione del problema da una equazione

$$F(e_1, e_2, e_3) = 0, \tag{1}$$

essendo F una forma ternaria di terzo ordine.

È noto ancora come la moltiplicazione complessa per la quale il moltiplicatore μ è dato dalla

$$\mu = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-23}), \tag{2}$$

sia connessa alla trasformazione del sesto ordine delle funzioni ellittiche.

Ne deriva che questa trasformazione dovrà presentare una equazione la quale nel caso particolare riducasi alla (1). La ricerca di essa ed alcune sue conseguenze formano lo scopo di questo breve scritto.

*) HALPHEN, *Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et, en particulier, sur la multiplication par* $\sqrt{-23}$ [Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. IV, t. V (1889), pp. 5-52] e *Traité des fonctions elliptiques,* t. III (Paris, 1891), pp. 151-193.

2. Richiamo alcuni risultati contenuti nella mia Memoria: *La trasformazione d'ordine pari delle funzioni ellittiche* *), mantenendo le stesse denominazioni.

La equazione modulare per $n = 6$, è dimostrato in quel lavoro, è la seguente:

$$(3)\qquad (s_1 - e)^4 - \tfrac{1}{2} G_2 (s_1 - e)^2 - G_3 (s_1 - e) - \tfrac{1}{48} G_2^2 = 0,$$

nella quale:

$$G_2 = 60 e^2 - 4 g_2, \qquad G_3 = 14 g_2 e + 22 g_3.$$

Inoltre gli invarianti γ_2, γ_3 trasformati hanno i valori:

$$\gamma_2 = 120 (s_1 - e)^2 - 9 G_2, \qquad \gamma_3 = 280 (s_1 - e)^3 - 42 G_2 (s_1 - e) - 27 G_3,$$

indicando con e una delle radici e_1, e_2, e_3.

Posto

$$s_1 = y - e,$$

la equazione (3) prende la forma:

$$(4)\qquad y^4 - 8 e y^3 + 2 (g_2 - 3 e^2) y^2 - \tfrac{1}{3} (g_2 - 3 e^2)^2 = 0,$$

o, ponendo

$$h(e) = 3 e^2 - \tfrac{1}{4} g_2, \qquad p = 3 e - 2 \sqrt{h(e)}, \qquad q = 3 e + 2 \sqrt{h(e)},$$

la

$$(5)\qquad 4 y^2 (y - p)(y - q) - (y^2 - p q)^2 = 0,$$

ed i valori di γ_2, γ_3 conducono alla

$$(6)\quad \gamma_3 - 14 e \gamma_2 = 4 \cdot 7 (10 y^3 - 120 e y^2 + 270 e^2 y + 6 g_2 y - 11 g_2 e + \tfrac{79}{7} g_3).$$

Sieno

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

e supponiamo nelle formole superiori $e = e_1$. Si denominino con ε_1, ε_2, ε_3 i valori trasformati e quindi:

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\tfrac{1}{4} \gamma_2, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \tfrac{1}{4} \gamma_3.$$

Le formole di trasformazione sopra indicate dànno:

$$\varepsilon_1 = -2 (e_1 + y) + 3 q - \frac{2 q (p - q)}{y - q},$$

$$\varepsilon_2 = -2 (e_1 + y) + 3 p + \frac{2 p (p - q)}{y - p},$$

$$\varepsilon_3 = -2 (e_1 + y) + 2 \frac{p q}{y},$$

*) [XCVI: t. III, pp. 51-60].

ed osservando che per la equazione (4) si ha:

$$\frac{p^2q^2}{y^2} = 3(y^2 - 8e_1y + 2pq),$$

si otterranno le tre relazioni seguenti:

$$pq\varepsilon_3 = 6y^3 - 48e_1y^2 + 10g_2y - 30e_1^2y - \tfrac{1}{2}g_2e_1 + \tfrac{3}{2}g_3,$$

$$\varepsilon_3^2 + 4e_1\varepsilon_3 = 16\left(y^2 - 6e_1y + g_2 - \tfrac{13}{4}e_1^2\right),$$

$$\varepsilon_3^3 - 12e_1^2\varepsilon_3 = 16\left(4y^3 - 42e_1y^2 + 12g_2y - \tfrac{17}{4}g_2e_1 + \tfrac{55}{4}g_3\right),$$

dalle quali, moltiplicando la prima per 24, la seconda per $-5.6e_1$, la terza per -1, e sommando, si giunge alla

$$-\varepsilon_3^3 - 5.6e_1\varepsilon_3^2 + 24g_2\varepsilon_3 - 3^2.4.5e_1^2\varepsilon_3 - 2.3^3g_2e_1 - \frac{2.3^4.5}{7}g_3$$
$$= 8\left(10y^3 - 120e_1y^2 + 270e_1^2y + 6g_2y - 11g_2e_1 + \tfrac{79}{7}g_3\right),$$

la quale, posta a confronto colla (6), dà:

$$(7)\quad \gamma_3 + 3^4.5g_3 + 7\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon_3^3 + 3.5e_1\varepsilon_3^2 + 2.3^2.5e_1^2\varepsilon_3 - 2\gamma_2e_1 - 12g_2\varepsilon_3 + 3^3g_2e_1\right) = 0,$$

cioè *l'equazione cercata.*

Per la moltiplicazione sono

$$\varepsilon_3 = \mu^2e_3, \qquad \gamma_2 = \mu^4g_2, \qquad \gamma_3 = \mu^6g_3,$$

e quando μ abbia il valore (2), ponendo con Halphen:

$$e_1 = \tfrac{1}{2}(2t-1)e_2, \qquad e_3 = -\tfrac{1}{2}(2t+1)e_2,$$

la equazione (7) diventa la

$$7(17\mu^2 + 4.3^2)(4.19t^3 - 3^2.7t) + \tfrac{3}{2}(5\mu^2 + 4.3^2)(4.317t^2 - 3^2) = 0,$$

che moltiplicata per $5\mu^2 + 19$ conduce alla equazione di Halphen (pag. 174):

$$7i\sqrt{23}(4.19t^3 - 3^2.7t) + \tfrac{3}{2}(4.317t^2 - 3^2) = 0.$$

3. Posto

$$\upsilon = \frac{y^2 - pq}{y^2},$$

a equazione (4) si trasforma nella

$$\upsilon^3(\upsilon+8)=4^2\frac{(p-q)^2}{pq}(1-\upsilon),$$

e quindi, se

$$\delta=g_2^3-27g_3^2,\qquad D=G_2^3-27G_3^2,\qquad \Delta=\gamma_2^3-27\gamma_3^2,$$

si deducono le

$$\frac{D}{\delta}=4^6\frac{1-\upsilon}{\upsilon^3(\upsilon+8)},\qquad \frac{\Delta}{\delta}=4^6\frac{(1-\upsilon)^5(\upsilon+8)}{\upsilon^5},$$

ed indicando il moltiplicatore con z, si ha:

$$z^{24}=4^6\frac{(1-\upsilon)^5(\upsilon+8)}{\upsilon^5},$$

ed analogamente si ottengono altre formole note della trasformazione.

Agosto, 1896.

[Pa.], [G.].

IC.

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI EQUIVALENTI ALLE RISPETTIVE EQUAZIONI DIFFERENZIALI AGGIUNTE DI LAGRANGE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXIV (1896), pp. 339-346.

1. Le proprietà di quella equazione differenziale lineare, la quale considerata per la prima volta da LAGRANGE fu poi denominata equazione differenziale aggiunta di LAGRANGE, furono stabilite da JACOBI, da HESSE, da BERTRAND, da DARBOUX. Questi autori hanno dimostrato che, allorquando la equazione differenziale aggiunta ammetta gli stessi integrali che l'equazione differenziale primitiva, cioè sia ad essa *equivalente*, sussiste fra quegli integrali e le loro derivate un determinato numero di relazioni quadratiche *).

In modo particolare, se n è un numero dispari, ed $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rappresentano un sistema fondamentale di integrali della equazione differenziale lineare

$$(1) \qquad y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 y^{(n-2)} + \cdots + n p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

se l'equazione differenziale aggiunta di LAGRANGE è equivalente alla superiore, si hanno le

*) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II (Paris, 1889); liv. IV, chap. V, pp. 99-121.

$$
(2) \qquad \begin{cases}
f(y_1, y_2, \ldots\ y_n) = 0, \\
f(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f\left[y_1^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}, \ldots, y_n^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}\right] = 0, \\
f\left[y_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, y_2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \ldots, y_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right] = 1,
\end{cases}
$$

essendo f una forma quadratica a coefficienti costanti.

2. Nel volume XIII degli *Annali* *), e nel XIV degli *Acta Mathematica* **) ho dato una formola generale di derivazione successiva per una forma $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'ordine m qualsivoglia, ai coefficienti costanti.

Supponendo che le $n-1$ quantità $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ possano assumere i valori $0, 1, 2, \ldots, m$; posto

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1},$$

$$f^{(r)}(y_1) = \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r} f_r(y_1),$$

ed analogamente per le altre derivate, indico con $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ la espressione

$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = f_r(y_1) y_1'^{r_1} y_1''^{r_2} \ldots y_1^{(n-1)^{r_{n-1}}} + \cdots$$

e quindi:

$$(0, 0, \ldots, 0) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = 0 \quad \text{per} \quad r > m,$$

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) = f_1(y_1)y'_1 + f_1(y_2)y'_2 + \cdots + f_1(y_n)y'_n,$$

$$(2, 0, 0, \ldots, 0) = f_2(y_1)y_1'^2 + \cdots + 2f_2(y_1, y_2)y'_1 y'_2 + \cdots,$$

e così di seguito.

---

*) *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* [LXXXVII: t. II, pp. 319-340].

**) *Les invariants des équations différentielles linéaires* [Acta Mathematica, t. XIV (1890-91), pp. 233-248].

Ciò posto, la formola di derivazione successiva è la seguente:

$$\frac{d(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})}{dx} = \sum_1^{n-2} r_s (r_1, r_2, \ldots, r_s - 1, r_{s+1} + 1, \ldots r_{n-1})$$

$$+ (m - r)(r_1 + 1, r_2, \ldots, r_{n-1})$$

$$- r_{n-1} \sum_2^n \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s} p_s (r_1, r_2, \ldots, r_{n-s} + 1, \ldots r_{n-1} - 1).$$

Il numero delle espressioni $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ è evidentemente eguale a

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}.$$

3. Il caso che intendiamo qui considerare è quello in cui

$$m = 2 \quad \text{e} \quad (0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

ed in conseguenza:

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

In esso le altre $\frac{n^2 + n - 4}{2}$ quantità $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ si possono esprimere in funzione delle $\frac{n-1}{2}$ seguenti:

$$(2, 0, 0, \ldots, 0), \quad (0, 2, 0, \ldots, 0), \quad (0, 0, 2, \ldots, 0), \quad \ldots$$

cioè dei primi membri delle equazioni (2). Queste però non sono fra loro indipendenti, ma bensì legate da $\frac{n+1}{2}$ relazioni fra esse e le loro derivate, ad eccezione del caso di $n = 3$.

Consideriamo dapprima questo caso. La formola di derivazione diventa:

$$\frac{d(r_1, r_2)}{dx} = r_1(r_1 - 1, r_2 + 1) + (2 - r)(r_1 + 1, r_2)$$

$$- r_2[3p_2(r_1 + 1, r_2 - 1) + p_3(r_1, r_2 - 1)],$$

da cui:

$$\frac{d(0, 0)}{dx} = 2(1, 0), \quad \frac{d(1, 0)}{dx} = (0, 1) + (2, 0), \quad \frac{d(2, 0)}{dx} = 2(1, 1),$$

$$\frac{d(0, 1)}{dx} = (1, 1) - [3p_2(1, 0) + p_3(0, 0)],$$

$$\frac{d(1, 1)}{dx} = (0, 2) - [3p_2(2, 0) + p_3(1, 0)],$$

$$\frac{d(0, 2)}{dx} = -2[3p_2(1, 1) + p_3(0, 1)].$$

Supposto

$$(0, 0) = 0, \quad (2, 0) = \lambda,$$

si deducono le

$$(1, 0) = 0, \quad (0, 1) = -\lambda, \quad (1, 1) = \tfrac{1}{2}\lambda',$$

e per la quarta:

$$(1, 1) = 0, \quad \lambda = \text{cost.},$$

$$(0, 2) = 3p_2\lambda, \quad \frac{d(0, 2)}{dx} = 2p_3\lambda,$$

da cui per l'ultima:

$$2p_3 - 3p_2' = 0,$$

cioè nullo l'invariante della equazione differenziale (1), come è noto.

4. Sia in secondo luogo $n = 5$. La formola di derivazione è in questo caso:

$$\frac{d(r_1, r_2, r_3, r_4)}{dx} = r_1(r_1 - 1, r_2 + 1, r_3, r_4) + r_2(r_1, r_2 - 1, r_3 + 1, r_4)$$
$$+ r_3(r_1, r_2, r_3 - 1, r_4 + 1) + (2 - r)(r_1 + 1, r_2, r_3, r_4)$$
$$- r_4[10p_2(r_1, r_2, r_3 + 1, r_4 - 1) + 10p_3(r_1, r_2 + 1, r_3, r_4 - 1)$$
$$+ 5p_4(r_1 + 1, r_2, r_3, r_4 - 1) + p_5(r_1, r_2, r_3, r_4 - 1)].$$

Le funzioni (r_1, r_2, r_3, r_4) sono in numero di 15 e, posto

$$(0, 0, 0, 0) = 0, \quad (2, 0, 0, 0) = \lambda, \quad (0, 2, 0, 0) = \mu,$$

si ha:

$$(1, 0, 0, 0) = 0,$$

e le altre undici espressioni sono funzioni di λ e di μ; ma dalla formola di derivazione, esclusa la prima, si hanno quattordici relazioni; rimarranno quindi tre relazioni fra λ, μ e loro derivate.

Si avranno così:

$$(0,\,1,\,0,\,0)=-\lambda,\qquad (1,\,1,\,0,\,0)=\tfrac{1}{2}\lambda',\qquad (0,\,0,\,1,\,0)=-\tfrac{3}{2}\lambda',$$

$$(1,\,0,\,1,\,0)=\tfrac{1}{2}\lambda''-\mu,\quad (0,\,0,\,0,\,1)=-2\lambda''+\mu,\quad (0,\,1,\,1,\,0)=\tfrac{1}{2}\mu',$$

$$(1,\,0,\,0,\,1)=\tfrac{1}{2}\lambda'''-\tfrac{3}{2}\mu',$$

ma:

$$\frac{d(0,\,0,\,0,\,1)}{dx}=(1,\,0,\,0,\,1)-[10p_2(0,\,0,\,1,\,0)+10p_3(0,\,1,\,0,\,0)$$
$$+5p_4(1,\,0,\,0,\,0)+p_5(0,\,0,\,0,\,0)],$$

quindi si avrà la prima relazione fra λ, μ:

$$\mu'=\lambda'''+6p_2\lambda'+4p_3\lambda, \tag{3}$$

e per essa:

$$(0,\,1,\,1,\,0)=\tfrac{1}{2}\lambda'''+3p_2\lambda'+2p_3\lambda,$$

$$(1,\,0,\,0,\,1)=-\lambda'''-9p_2\lambda'-6p_3\lambda.$$

La formola di derivazione applicata a queste funzioni dà:

$$(0,\,1,\,0,\,1)=-\lambda^{IV}-4p_2\lambda''-(9p_2'+p_3)\lambda'-(6p_3'-5p_4)\lambda-10p_2\mu,$$

$$(0,\,0,\,2,\,0)=\tfrac{3}{2}\lambda^{IV}+7p_2\lambda''+(12p_2'+3p_3)\lambda'+(8p_3'-5p_4)\lambda+10p_2\mu,$$

ma:

$$\frac{d(0,\,0,\,2,\,0)}{dx}=2(0,\,0,\,1,\,1),$$

$$\frac{d(0,\,1,\,0,\,1)}{dx}=(0,\,0,\,1,\,1)-[10p_2(0,\,1,\,1,\,0)+10p_3(0,\,2,\,0,\,0)$$
$$+5p_4(1,\,1,\,0,\,0)+p_5(0,\,1,\,0,\,0)],$$

in conseguenza dalla eliminazione di $(0,\,0,\,1,\,1)$ si avrà la seconda relazione fra λ, μ; ossia:

$$0=\tfrac{7}{4}\lambda^{V}+\tfrac{25}{2}p_2\lambda'''+\tfrac{1}{2}(45p_2'+5p_3)\lambda''+\tfrac{1}{2}(30p_2''+25p_3'-20p_4+120p_2^2)\lambda'$$
$$+\tfrac{1}{2}(20p_3''-15p_4'+2p_5+80p_2p_3)\lambda-10\left(p_3-\tfrac{3}{2}p_2'\right)\mu.$$

Questa relazione, introducendo i valori a, b, c dei tre invarianti fondamentali della equazione differenziale del quinto ordine, cioè:

$$a=p_3-\tfrac{3}{2}p_2',\qquad b=p_4-2p_3'+\tfrac{6}{5}p_2''-\tfrac{16}{5}p_2^2,$$

$$c=p_5-\tfrac{5}{2}p_4'+\tfrac{15}{7}p_3''-\tfrac{5}{7}p_2'''-\tfrac{80}{7}p_2a,$$

prende la forma:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &10a\mu = \tfrac{7}{4}A - 15a\lambda'' - 25\left(a' + \tfrac{3}{4}b\right)\lambda' \\ &-\left(\frac{2.5^2}{7}a'' + \frac{3.5^2}{8}b' + \frac{3}{4}c - \frac{4.5.11}{7}p_2 a\right)\lambda, \end{aligned}\right.$$

posto

$$A = \lambda^{\mathrm{v}} + 10p_2\lambda''' + 10p_3\lambda'' + 5p_4\lambda' + p_5\lambda.$$

La terza relazione si deduce dai valori di

$$\frac{d(0,\ 0,\ 1,\ 1)}{dx}, \qquad \frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx},$$

ma prima di calcolarla distinguiamo il caso in cui

$$\lambda = (2,\ 0,\ 0,\ 0) = 0,$$

dal caso contrario. Se $\lambda = 0$, si ottiene dalla (3): $\mu =$ cost., sussistono cioè le relazioni (2) per $n = 5$ e l'equazione differenziale è equivalente alla sua aggiunta.

Per la (4) sarà quindi:

$$a = 0,$$

e risultando in questo caso

$$(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 5p_2'\mu, \qquad (0,\ 0,\ 0,\ 2) = 5(p_2'' - p_4 + 20p_2^2)\mu,$$

dalla

$$\frac{d(0,\ 0,\ 0,\ 2)}{dx} = -2[10p_2(0,\ 0,\ 1,\ 1) + 10p_3(0,\ 1,\ 0,\ 1)$$
$$+ 5p_4(1,\ 0,\ 0,\ 1) + p_5(0,\ 0,\ 0,\ 1)],$$

si ottiene che

$$p_5 - \tfrac{5}{2}p_4' + \tfrac{5}{2}p_2''' - 4.5^2 p_2 a = 0,$$

ossia:

$$c = 0.$$

Se quindi la equazione differenziale (1) per $n = 5$ è equivalente alla rispettiva aggiunta di Lagrange, gli invarianti di essa di grado dispari a, c sono nulli. Questa proprietà vale per n qualunque (dispari, o pari) come si è osservato nella seconda delle citate Memorie.

Ma aggiungiamo ora, ed è lo scopo di questo scritto, *la reciproca non sussiste.* Supponiamo infatti sieno $a = c = 0$ ma non sia $\lambda = 0$. Le equazioni (3), (4) dànno:

$$(5)\qquad \mu' = \lambda''' + 6p_2\lambda' + 6p_2'\lambda,$$

$$(6)\qquad A - \frac{3.5^2}{7}b\lambda' - \frac{3.5^2}{2.7}b'\lambda = 0,$$

ossia:

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda^{v} + 10 p_2 \lambda''' + 15 p_2' \lambda'' + \left(9 p_2'' + 16 p_2^2 - \frac{5.8}{7} b\right)\lambda' \\ \qquad + \left(2 p_2''' + 16 p_2 p_2' - \frac{4.5}{7} b'\right)\lambda = 0, \end{cases}$$

ed infine la terza relazione riducesi alla

$$(8)\quad 3.4.5 b\lambda''' + 3^2.5 b'\lambda'' + 3.5(b'' + 4^2 p_2 b)\lambda' + 2(b''' + 2.4^2 p_2 b' + 7.8 p_2' b)\lambda = 0.$$

Eliminando λ dalle (7), (8) si giunge ad una equazione di condizione fra l'invariante b, il coefficiente p_2 e le loro derivate. La (5) dà:

$$\mu = \lambda'' + 6 p_2 \lambda + \text{cost.},$$

e quindi si avranno i valori di λ, μ in funzione di b, p_2 e loro derivate.

Ma in questo caso ($\lambda \neq 0$) la equazione differenziale (1) può opportunamente trasformarsi nel modo seguente. Pongasi

$$y = \lambda \upsilon,$$

essendo υ una funzione di z, e questa funzione di x. Supponendo

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\frac{z''}{z'},$$

e denominando con α, β, γ i tre invarianti fondamentali della equazione differenziale trasformata, saranno:

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0,$$

e l'equazione stessa avrà la forma:

$$(9)\quad \frac{d^5\upsilon}{dz^5} + 10 q_2 \frac{d^3\upsilon}{dz^3} + 10 q_3 \frac{d^2\upsilon}{dz^2} + 5 q_4 \frac{d\upsilon}{dz} + q_5 \upsilon = 0,$$

essendo

$$q_3 = \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4 = \beta + \frac{9}{5}\frac{d^2 q_2}{dz^2} + \frac{16}{5} q_2^2,$$

$$q_5 = \frac{5}{2}\frac{d\beta}{dz} + 2\frac{d^3 q_2}{dz^3} + 16 q_2 \frac{dq_2}{dz}.$$

Ma, come è noto:

$$\beta z'^4 = b,$$

e trovasi facilmente essere

$$q_5 z'^5 = \frac{A}{\lambda};$$

la equazione (6) condurrà così alla prima condizione:

$$q_5 = \frac{3.5^2}{2.7}\frac{d\beta}{dz},$$

ed in conseguenza:

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{7}{2.5}\frac{d^3 q_2}{dz^3} + \frac{4.7}{5} q_2 \frac{dq_2}{dz},$$

$$\beta = \frac{7}{2.5}\frac{d^2 q_2}{dz^2} + \frac{2.7}{5} q_2^2 + K,$$

da cui:

$$q_4 = \frac{5}{2}\frac{d^2 q_2}{dz^2} + 6 q_2^2 + K.$$

Da ultimo l'equazione (8) per la stessa trasformazione diventa:

$$\frac{d^3\beta}{dz^3} + 2.4^2 q_2 \frac{d\beta}{dz} + 7.8\beta\frac{dq_2}{dz} = 0,$$

e quindi:

$$\frac{1}{4^2.5}\frac{d^5 q_2}{dz^5} + \frac{1}{2} q_2 \frac{d^3 q_2}{dz^3} + \frac{dq_2}{dz}\frac{d^2 q_2}{dz^2} + 6 q_2^2 \frac{dq_2}{dz} + K\frac{dq_2}{dz} = 0. \tag{10}$$

Si ha così il teorema: *Se gli invarianti di grado dispari di una equazione del quinto ordine sono nulli, la equazione può trasformarsi nella* (9) *ed in questa sono:*

$$q_3 = \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4 = \frac{5}{2}\frac{d^2 q_2}{dz^2} + 6 q_2^2 + K,$$

$$q_5 = \frac{3.5}{4}\frac{d^3 q_2}{dz^3} + 5.6 q_2 \frac{dq_2}{dz},$$

ed il coefficiente q_2 deve soddisfare l'equazione (10).

Le stesse proprietà, deducesi tosto dalle relazioni (6), (8), sussistono per la equazione differenziale primitiva, nella ipotesi di $\lambda = \text{cost.}$

Agosto, 1896.

[Pa.], [G.].

C.

IL DISCRIMINANTE DELLE FORME BINARIE DEL SETTIMO ORDINE.

Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XXVI (1897), pp. 255-259.

La ricerca del valore di questo discriminante, in funzione di invarianti della stessa forma, costituisce lo scopo principale di una interessante Memoria del prof. GORDAN, pubblicata circa dieci anni ora sono nei *Mathematische Annalen* *). Se ora ritorno sull'argomento si è per dimostrare come al risultato, certo non facile, ottenuto dal prof. GORDAN, si possa giungere per altra via più diretta, e per ciò forse, feconda d'altri risultati.

Di questo metodo già diedi un esempio in una comunicazione alla Accademia delle Scienze di Parigi **), e per esso, nel caso attuale, un invariante di grado m della forma del 7° ordine può esprimersi in funzione intera e razionale di covarianti e di invarianti di una forma del quinto ordine, funzione dell'ordine $2m$ e di grado m.

Il discriminante delle forme di settimo ordine essendo del grado dodicesimo, potrà essere funzione dell'invariante di quarto grado, dei tre invarianti di ottavo grado, e dei sei invarianti del dodicesimo grado. Adotterò per questi invarianti le notazioni op-

*) GORDAN, *Die Discriminante der Form 7. Grades* $f = a_x^7$ [Mathematische Annalen, t. XXXI (1888), pp. 566-600].

**) *Sur les racines multiples des équations algébriques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXI (1895), pp. 582-585].

portune del sig. GORDAN, e posto

$$L = \frac{7^4}{8.5^2}, \qquad M = \frac{3^2.7^8}{4^3.5^2}, \qquad LM = 2N,$$

indicherò con α; β_1, β_2, β_3; γ, γ_1, ..., γ_5, i seguenti invarianti:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = -LA, \quad \beta_1 = -\frac{M}{3.5}\gamma_{01}, \quad \beta_2 = \frac{M}{3}\gamma_{02}, \quad \beta_3 = \frac{2}{3.5}M\gamma_{03}, \\ \gamma = \frac{N}{5}c_1, \quad \gamma_1 = -\frac{N}{2}\gamma_{11}, \quad \gamma_2 = -2.5^2 N\gamma_{22}, \quad \gamma_3 = -8N\gamma_{33}, \\ \gamma_4 = -5.8N\gamma_{23}, \quad \gamma_5 = 2.5N\gamma_{12}. \end{cases}$$

Queste quantità α, β, γ sono esprimibili in funzione di invarianti e di covarianti della forma di quinto ordine.

Pei covarianti e gli invarianti di quest'ultima forma mi riferirò alle notazioni di un mio lavoro pubblicato negli *Annali* nel 1883 *). Si hanno così per α, β, γ i seguenti valori **):

$$\alpha = 5hl - \varphi p,$$

$$\beta_1 = 62h^2l^2 + 3^2.7h^2u - 2.11\varphi hlp + 2\varphi^2l^3 - 7\varphi^2p^2,$$

$$\beta_2 = 37h^2l^2 + 3^2.7h^2u - 3.4\varphi hlp + \tfrac{5}{3}\varphi^2l^3 + 7\varphi^2lu + 2.11\varphi^2p^2,$$

$$\beta_3 = \alpha^2 + \varphi^2\left(4.11p^2 - \frac{8}{3}l^3 - \frac{4.7}{3}lu + \frac{7^2}{3^2}g_4h\right).$$

Osservisi che se $\varphi = 0$, o se la forma f del settimo ordine ha *tre* radici eguali, sono

$$\beta_1 - \beta_2 = \alpha^2, \qquad \beta_3 = \alpha^2,$$

ossia:

$$\gamma_{01} + 5\gamma_{02} + \frac{1}{3.5}A^2 = 0, \qquad \gamma_{03} - \frac{1}{2.3.5}A^2 = 0,$$

da cui:

$$\gamma_{01} + 5\gamma_{02} + 2\gamma_{03} = 0.$$

I valori di γ, γ_1, ... γ_5 sono i seguenti:

$$\gamma = -5h^3(13l^3 - 3^2.7lu + 2.3^2.5p^2) + 7\varphi h^2p(11l^2 + 3^2u)$$
$$+ 2\varphi^2hl(5l^3 + 2.17p^2) - 2\varphi^3p(4l^3 - 5p^2),$$

---

*) *Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria* [LXXXV: t. II, pp. 281-294].

**) Notisi che φ, g_4 sostituiscono f, A dell'indicato lavoro.

$$\begin{aligned}\gamma_1 = h^3\left(\frac{691}{4} l^3 + \frac{3.7.23}{2} lu - 4.3^2.11 p^2 - 7^2 g_4 h\right) - \frac{7}{4}\varphi h^2 p (47 l^2 + 2.3^2 u)\\ + \varphi^2 h l \left(3.5 l^3 + 3.7 lu + \frac{167}{4} p^2\right) - \varphi^3 p \left(8 l^3 + \frac{7^2}{4} p^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 = h^3\left(\frac{719}{2} l^3 + \frac{3.7.139}{2} lu - 3^2.4^2.37 p^2 + 7^3 g_4 h\right) + \frac{7.59}{2}\varphi h^2 p (l^2 + 3^2 u)\\ + \varphi^2 h l \left(\frac{7.13}{2.3^2} l^3 + \frac{5.7}{2} lu + 3.4.157 p^2 - \frac{4.7^2}{3} g_4 h\right)\\ - \varphi^3 p \left(\frac{3.37}{2} l^3 + \frac{7.59}{2.3} lu + 4.11^2 p^2 - \frac{2.7^2.11}{3^2} g_4 h\right) - \frac{7^2}{3^2} g_4 \varphi^4 l^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3 = -3 h^3\left(\frac{11}{2} l^3 + \frac{3^2.7^2}{2} lu + 3^5.4^2 p^2 + 3.7^2 g_4 h\right) + \frac{3^2}{2}\varphi h^2 p (113 l^2 + 3^4.7 u)\\ + \varphi^2 h l \left(\frac{193}{2.3^2} l^3 + \frac{7.29}{2.3} lu + 7.481 p^2 + \frac{5.7^3}{3^2} g_4 h\right)\\ - \varphi^3 p \left(\frac{887}{2.3} l^3 + \frac{7.139}{2} lu + 3^4.5^2 p^2 + \frac{2.7^2}{3} g_4 h\right) - \frac{7^2}{2.3} g_4 \varphi^4 \left(\frac{19}{3} l^2 + 7u\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4 = -5.6 h^3 (6.7 lu + 3^2.4.11 p^2 + 7^2 g_4 h) + 3.4 \varphi h^2 p (2.11 l^2 + 3^2.7 u)\\ + \frac{4}{3^3}\varphi^2 h l \left(409 l^3 + 3.5.7.13 lu + 3^2.5.589 p^2 + \frac{7^2.253}{4} g_4 h\right)\\ - \varphi^3 p \left(\frac{4.1277}{3^3} l^3 + \frac{4.7.53}{3} lu + 3^2.4.5.11 p^2 + 6.7^2 g_4 h\right) - \frac{7^2}{2.3^2} g_4 \varphi^4 \left(\frac{1}{3} l^2 - u\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_5 = h^3\left(\frac{11.97}{2} l^3 + \frac{3^2.7^3}{2} lu + 3^3.8.11 p^2 + 2.3.7^2 g_4 h\right) - \frac{1}{2}\varphi h^2 p (631 l^2 + 3^2.7.13 u)\\ + \varphi^2 h l \left(\frac{43}{2} l^3 + \frac{7.29}{2} lu - 2.151 p^2 - \frac{4.7^2}{3} g_4 h\right)\\ + \varphi^3 p \left(\frac{3.19}{2} l^3 - \frac{7}{2} lu + 2.7.11 p^2 + \frac{2.7^2}{3} g_4 h\right).\end{aligned}$$

Importa osservare che fra i termini di queste sei espressioni non ha luogo alcuna sizigia. Ciò posto, il problema della calcolazione del discriminante trasformasi nel seguente: determinare i valori dei coefficienti numerici $\rho, \rho_1, \ldots \rho_5$; $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$, pei

quali sia soddisfatta la equazione:

$$(2)\qquad \rho\gamma + \rho_1\gamma_1 + \cdots + \rho_5\gamma_5 = \alpha(\delta\alpha^2 + \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 + \delta_3\beta_3).$$

Notisi dapprima che nel secondo membro non esistendo i termini $g_4\varphi^4u$, $g_4\varphi^4l^2$, g_4h^4, h^3p^2, si hanno tosto, eguagliando a zero i corrispondenti del primo membro:

$$\rho_4 = 3\rho_3, \qquad \rho_2 = -\frac{11}{3}\rho_3, \qquad -\rho_1 + 2.3\rho_5 = \frac{2.11.17}{3}\rho_3, \qquad \rho = 3.4^2\rho_3.$$

Eguagliando in secondo luogo i coefficienti di $g_4\varphi^2h^2l$ e di $g_4\varphi^3hp$ nei due membri, si hanno le

$$83\rho_3 - 3\rho_5 = \frac{5}{4}\delta_3, \qquad \frac{373}{3}\rho_3 - 3\rho_5 = \frac{1}{2}\delta_3,$$

le quali conducono alle

$$\delta_3 = -\frac{4^2.31}{3^2}\rho_3, \qquad \rho_5 = \frac{1367}{3^3}\rho_3,$$

e quindi:

$$\rho_1 = \frac{4.403}{3^2}\rho_3.$$

I coefficienti di h^3lu, φh^2pu conducono alla stessa relazione:

$$19\rho_5 - \frac{8.59}{3}\rho_3 = 2(\delta_1 + \delta_2),$$

ossia:

$$2(\delta_1 + \delta_2) = \frac{5^2.869}{3^3}\rho_3,$$

ed i coefficienti di φ^2hl^4 alla

$$2\delta_1 + \frac{5}{3}\delta_2 = \frac{39899}{2.3^3}\rho_3,$$

da cui:

$$\delta_1 = \frac{2.4^2.173}{3^3}\rho_3, \qquad \delta_2 = \frac{3551}{2.3^2}\rho_3.$$

Infine eguagliando i coefficienti di φ^3p^3, trovasi:

$$\delta = -\frac{8569}{3^3}\rho_3.$$

Questi valori soddisfano tutte le altre relazioni.

Sostituendo ora nella (2) i valori di questi coefficienti, supponendo $\rho_3 = \frac{3^4}{4}$,

e per α, β, γ i loro valori (1), dividendo per N, si ottiene:

$$\frac{4.3^5}{5}c_1 - \frac{3^2.403}{2}\gamma_{11} + \frac{3^3.5^2.11}{2}\gamma_{22} - 2.3^4\gamma_{33} - 2.3^5.5\gamma_{23} + \frac{3.5.1367}{2}\gamma_{12}$$

$$= A\left(\frac{8569}{2.3.5^2}A^2 + \frac{4^2.173}{5}\gamma_{01} - \frac{3.3551}{4}\gamma_{02} + \frac{3.4^2.31}{5}\gamma_{03}\right),$$

od il risultato del sig. GORDAN.

Se nei valori superiori di $\gamma, \gamma_1, \ldots \gamma_5$ supponesi $\varphi = 0$, sussistendo per questo caso la sizigia

$$4g_4 h = -l^3 - 6lu + 9p^2,$$

si ottengono le cinque relazioni:

$$c_1 + \frac{4^3}{3^2.5}\gamma_{33} + \frac{2.5}{3}A\gamma_{02} - \frac{4^2.19}{3^3.5^3}A^3 = 0,$$

$$\gamma_{11} - \frac{4^2}{5^2}\gamma_{33} - \frac{4}{3}A\gamma_{02} + \frac{1}{3.5^4}A^3 = 0,$$

$$\gamma_{22} - \frac{4.3^2}{5^4}\gamma_{33} - \frac{1}{5^2}A\gamma_{02} + \frac{7}{5^6}A^3 = 0,$$

$$\gamma_{23} - \frac{2.3}{5^2}\gamma_{33} - \frac{1}{4.5}A\gamma_{02} - \frac{1}{3.5^4}A^3 = 0,$$

$$\gamma_{12} - \frac{3.8}{5^3}\gamma_{33} + \frac{7}{2.3.5}A\gamma_{02} - \frac{11}{3.5^5}A^3 = 0,$$

le quali sono pure soddisfatte per una forma f del settimo ordine, la quale abbia tre radici eguali.

Settembre 1897.

[Pa.], [G.].

CI.

SUL MOTO DEL CALORE NEL GLOBO DELLA TERRA.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, e Biblioteca Italiana,
Nuova serie, tomo I (1847), pp. 295-303.

Una delle più importanti questioni fra quelle che vengono trattate dalle teorie fisico-matematiche è la applicazione del problema del moto del calore in una sfera, al globo della terra. Intorno a questo argomento, conversando col signor dott. GABRIO PIOLA, indicavami egli come le formole generali date dal FOURIER nel capitolo V della sua *Théorie analytique de la chaleur* potevano adattarsi anche alle applicazioni che si trovano al capitolo XII della *Théorie mathématique de la chaleur* del POISSON, e con vantaggio dal lato della facilità e della efficacia. Seguendo il consiglio del signor PIOLA, e partendo dalla formola di FOURIER, che dà la temperatura di un punto qualunque di una sfera omogenea, la quale al principio del tempo sia stata abbandonata da una causa che l'abbia riscaldata dal centro alla superficie secondo una data legge di temperatura iniziale, ho cercato di arrivare alla espressione che dà le temperature della parte solida del globo, ed essendo giunto ad una formola certamente più rigorosa al confronto di quella trovata dal POISSON con una analisi assai complicata, ho creduto non inopportuno il renderla pubblica.

La succitata formola di FOURIER è la seguente *)

$$(1) \qquad v = \frac{2}{x} \sum_1^{\infty} \frac{e^{-kn_i^2 t} \operatorname{sen} n_i x}{r - \frac{1}{2n_i} \operatorname{sen} 2n_i r} \int_0^r dx \,.\, x F(x) \operatorname{sen} n_i x \,,$$

*) FOURIER. — *Théorie analytique de la chaleur,* (Paris 1822), pag. 350.

nella quale r è il raggio della sfera, x la distanza del punto che si considera dal centro della sfera, k il rapporto tra la conducibilità interiore ed il prodotto della capacità per la densità, ed $F(x)$ rappresenta, quanto alla temperatura, lo stato iniziale ed arbitrario del solido. Finalmente i valori di n_i, dove facciasi $i = 1, 2, \ldots$, sono le radici della equazione

$$\frac{\operatorname{tang} n_i r}{n_i r} = \frac{1}{1 - hr}, \tag{2}$$

essendo h il rapporto tra le due conducibilità.

Cominceremo ad osservare che, trattandosi del globo, la quantità r è tanto grande da rendere negativo il secondo membro della equazione (2); dunque dovrà anche $\operatorname{tang} n_i r$ essere negativa, cioè l'arco $n_i r$ essere compreso: o tra $\frac{\pi}{2}$ e π; o tra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π; od in generale tra $\frac{2\lambda - 1}{2}\pi$ e $\lambda\pi$, rappresentando λ un numero intero. Pongasi per ciò

$$n_i r = \lambda\pi - s, \tag{3}$$

avremo: $\operatorname{tang} n_i r = -\operatorname{tang} s$, e la (2) diventerà:

$$\frac{\operatorname{tang} s}{\lambda\pi - s} = \frac{1}{hr} + \frac{1}{(hr)^2} + \frac{1}{(hr)^3} + \cdots,$$

che, sviluppata anche nel primo membro, dà:

$$\left(s + \frac{s^3}{3} + \frac{2s^5}{15} + \cdots\right)\left(1 + \frac{s}{\lambda\pi} + \frac{s^2}{\lambda^2\pi^2} + \cdots\right) = \lambda\pi\frac{1}{hr} + \lambda\pi\frac{1}{(hr)^2} + \cdots;$$

ossia, moltiplicando e trasportando:

$$s = \lambda\pi\frac{1}{hr} + \lambda\pi\frac{1}{(hr)^2} + \cdots - \frac{s^2}{\lambda\pi} - s^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\lambda^2\pi^2}\right) - \cdots;$$

dalla quale, per mezzo della serie di LAGRANGE:

$$s = \frac{\lambda\pi}{hr} - \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda\pi}{hr}\right)^3 + \cdots;$$

il qual valore, sostituito nella (3), dà:

$$n_i r = \lambda\pi - \frac{\lambda\pi}{hr},$$

trascurando i termini seguenti come affatto insensibili. Da quest'ultima equazione rica-

vasi subito:

$$(4) \qquad n_i = \frac{\lambda \pi}{r} - \frac{\lambda \pi}{h r^2}$$

e tutte le radici della equazione (2), le quali, come si è detto, non sono altro che i valori delle n_1, n_2, ..., si otterranno ponendo nella (4) $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ Sostituendo poi queste radici una dopo l'altra nella equazione (1), arriverebbesi a trovare dopo molto lavoro alcuni dei termini, i quali darebbero approssimativamente la richiesta espressione della temperatura. Ma osserviamo che tutte le radici che si ottengono ponendo per λ, nella equazione (4), la serie dei numeri dispari naturali, si ponno comprendere nella formola:

$$(5) \qquad n_i = \frac{(2p-1)\pi}{r} - \frac{(2p-1)\pi}{h r^2},$$

dove facciasi $p = 1, 2, 3, \ldots$ e che tutte le radici che si ottengono, sostituendo a λ la serie dei numeri pari naturali, si compendiano nella formola:

$$(6) \qquad n_i = \frac{2q\pi}{r} - \frac{2q\pi}{h r^2},$$

nella quale si faccia successivamente $q = 1, 2, 3. \ldots$ Dunque possiamo ritenere la formola (1) come divisa in due parti, in una delle quali debbasi porre per n_i il valore dato dalla (5) e nell'altra il valore dato dalla (6). Eseguiti quindi gli opportuni calcoli arriveremo a due formole, dalle quali sostituendo per p e per q i numeri naturali, risulteranno tutti i termini della serie richiesta come se si fossero calcolati uno ad uno per i diversi valori di λ.

La legge $F(x)$, per la distribuzione iniziale della temperatura all'origine della costituzione della nostra terra, ci è ignota; possiamo però desumerla dai dati fornitici presentemente dalla osservazione. Si è trovato che, circa dopo venti metri di profondità, nel qual punto non sono più sensibili le ineguaglianze di temperatura diurne ed annuali dovute all'azione dei raggi solari, le temperature crescono proporzionalmente alle profondità stesse. Chiamando quindi y la profondità variabile misurata sulla verticale, incominciando dalla superficie andando verso il centro, è facile il concepire doversi assumere:

$$(7) \qquad v = f + gy,$$

essendo f, g due costanti che si sanno assegnare in numeri col mezzo della esperienza. Si suppone poi che la forma (7) con costanti diverse, per esempio l, m, valesse anche alla costituzione della terra per esprimere la legge della temperatura iniziale. Questo fatto dell'aumento di temperatura proporzionale alle profondità ci induce ad ammettere

la ipotesi del calor centrale; cioè che le materie le quali trovansi nell'interno della crosta del globo siano ancora allo stato di fluido incandescente; al quale stato la forma sferoidica della terra e lo schiacciamento ai poli di rotazione sembrano indicare essere stata all'origine tutta la terra. È opinione di molti fisici e naturalisti che lo spessore medio della crosta della terra sia piccolo al confronto del raggio di essa; se ciò fosse, come è probabile, sarebbe tolta la difficoltà posta dal Poisson sul tener buona la forma (7) anche a distanze dalla superficie maggiori di quelle a cui siamo giunti colla esperienza, attesa la immensa temperatura che quelle materie dovrebbero avere al centro. Il supporre poi che verso il centro sussista ancora questo stato di fluidità, ci porta a credere che la terra, posta all'origine in un ambiente di temperatura inferiore, abbia cominciato a solidificarsi in tutto od in parte, e la solidificazione abbia avuto principio alla superficie per propagarsi verso il centro. Il signor Poisson trova inverosimile questa ipotesi, ed anzi opina dover essere avvenuto il contrario, giacchè le parti estreme o le più vicine alla superficie, raffreddandosi per le prime, avrebbero dovuto discendere al centro, ed il loro posto essere occupato dalle interne ancora calde, che pur esse raffreddandosi sarebbero discese; e le solidificazioni avrebbero così avuto luogo dal centro alla superficie. Credo poter citare a tale proposito una esperienza del signor Fournet *), il quale dice aver osservato più volte che, lasciando raffreddare una massa d'argento allo stato liquido, la solidificazione incomincia alla superficie ed avanzasi gradatamente verso il centro. Parmi che questo fatto sia applicabile senza veruna eccezione anche alla formazione del globo, concorrendo altresì nel secondo caso la forza centrifuga che doveva spingere le parti già solide il più lontano possibile dall'asse di rotazione. La geologia, deducendo la spiegazione di molti fatti dal calor centrale, serve anch'essa a rendere più probabile tale ipotesi. Fra questi credo dover notare principalmente la formazione delle montagne, essendosi dimostrato insufficiente a spiegarla il sistema Nettuniano, le eruzioni vulcaniche, e la antica uniformità di temperatura alla superficie della terra, la quale viene provata dalla identità degli avanzi di vegetali ed animali che trovansi fino ad una parte dei terreni terziarj in paesi di latitudini assai differenti.

Il signor Poisson, per rendere ragione dell'aumento di temperatura proporzionale alle profondità, propone un altro metodo di spiegazione fondato « *sopra una causa di cui la esistenza è certa* ». Questa causa è la ineguaglianza di calore nelle regioni dello spazio che la terra attraversa movendosi col sole e tutto il sistema planetario con una velocità che la osservazione non ha per anco determinata. Un fatto sussiste contro tale ipotesi, il quale desumesi dalla considerazione delle tavole, nelle quali trovansi re-

*) D'Aubuisson des Voisins. — *Traité de Géognosie,* tom. III, pag. 277.

gistrate le esperienze fatte per determinare in diversi luoghi della terra l'aumento di temperatura alle differenti profondità, ed è che tale aumento non segue la stessa legge per tutto il globo, e differisce da un paese ad un altro senza alcun rapporto nè colla latitudine nè colla longitudine. Il quale fenomeno, che spiegasi assai facilmente col calore centrale, atteso il differente spessore della crosta solida, parmi non possa ricevere spiegazione supponendo il globo trasportato da una atmosfera calda ad un'altra che lo sia meno.

Ammesso dunque che la legge per la distribuzione della temperatura iniziale possa essere rappresentata dalla espressione $l + my$, essendo $x = r - y$ si avrà:

$$F(x) = l + mr - mx,$$

e però, nella formola (1), avremo dapprima a calcolar l'integrale

$$\int_0^r dx . [x(l + mr) \operatorname{sen} n_i x - m x^2 \operatorname{sen} n_i x]. \tag{8}$$

Col mezzo della integrazione a parti, si ottengono subito le formole di integrali indefiniti:

$$\int dx . x \operatorname{sen} n_i x = \frac{\operatorname{sen} n_i x}{n_i^2} - \frac{x \cos n_i x}{n_i},$$

$$\int dx . x^2 \operatorname{sen} n_i x = \left(\frac{2}{n_i^3} - \frac{x^2}{n_i}\right) \cos n_i x + \frac{2x}{n_i^2} \operatorname{sen} n_i x,$$

mediante le quali calcolasi facilmente il valore dell'integrale (8), che riducesi a

$$l\left[\frac{\operatorname{sen} n_i r}{n_i^2} - \frac{r \cos n_i r}{n_i}\right] - m\left[\frac{r \operatorname{sen} n_i r}{n_i^2} + \frac{2}{n_i^3}(\cos n_i r - 1)\right]. \tag{9}$$

Ora, dalla equazione (5), abbiamo:

$$n_i r = (2p - 1)\pi - \frac{(2p-1)\pi}{hr},$$

talchè risulteranno:

$$\operatorname{sen} n_i r = \operatorname{sen} \frac{(2p-1)\pi}{hr} = \frac{(2p-1)\pi}{hr} - \frac{1}{2.3} \frac{(2p-1)^3 \pi^3}{h^3 r^3} + \cdots,$$

$$\cos n_i r = -\cos \frac{(2p-1)\pi}{hr} = -1 + \frac{1}{2} \frac{(2p-1)^2 \pi^2}{h^2 r^2} - \cdots,$$

$$\frac{1}{n_i} = \frac{r}{(2p-1)\pi} + \frac{1}{(2p-1)h\pi} + \cdots;$$

per conseguenza il coefficiente di l nella espressione (9) viene

$$\frac{r^2}{(2p-1)\pi}+\frac{2r}{(2p-1)h\pi}+\cdots,$$

nella quale le potenze di r vanno sempre decrescendo e diventano negative. Il coefficiente poi di m nella (9) trovasi

$$-\frac{4r^3}{(2p-1)^3\pi^3}-\frac{r^2}{(2p-1)h\pi}\left[\frac{12}{(2p-1)^2\pi^2}-1\right]+\cdots.$$

Pertanto la espressione (9), ossia l'integrale definito (8), ha un valore della forma:

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4m}{(2p-1)^3\pi^3}r^3+\left\{\frac{m}{(2p-1)h\pi}\left[\frac{12}{(2p-1)^2\pi^2}-1\right]+\frac{l}{(2p-1)\pi}\right\}r^2 \\ &\qquad +Ar+B+\frac{C}{r}+\cdots, \end{aligned} \right.$$

degradando continuamente le potenze di r.

Passiamo a calcolare gli altri elementi della formola (1).

Il coefficiente $\frac{2}{x}$ diventa

$$\frac{2}{r-y_{\prime}}=\frac{2}{r}+\frac{2y}{r^2}+\frac{2y^2}{r^3}+\cdots.$$

L'esponente negativo di e diventa, per la (5):

$$\frac{k(2p-1)^2\pi^2t}{r^2}-\frac{2k(2p-1)^2\pi^2t}{hr^3}+\frac{k(2p-1)^2\pi^2t}{h^2r^4},$$

di cui si ritiene il solo primo termine, essendo gli altri piccolissimi rispetto ad esso. Anche il primo termine sarebbe piccolissimo avuto solo riguardo al denominatore r^2 grandissimo; ma è da osservarsi che t è il valore del tempo che può incominciarsi a contare dalla costituzione del globo terrestre, talchè esso ha un valore incognito sommamente grande; e, per tale modo, la frazione $\frac{t}{r^2}$, rapporto di due numeri grandissimi, può avere un valore confrontabile con quelli che desumiamo dalle nostre misure.

Il fattore sen $n_i x$ diventa, avuto riguardo alla equazione (5):

$$\operatorname{sen}\left\{\left[\frac{(2p-1)\pi}{r}-\frac{(2p-1)\pi}{hr^2}\right](r-y)\right\}=(1+hy)\frac{(2p-1)\pi}{hr}-\frac{L}{r^2}+\cdots$$

Finalmente il denominatore $r - \frac{1}{2n_i}\,\text{sen}\,2n_i r$ si cambia in

$$r - \frac{1}{2}\left[\frac{r}{(2p-1)\pi} + \frac{1}{(2p-1)h\pi} + \cdots\right]\text{sen}\,\frac{2(2p-1)\pi}{hr} = r - \frac{1}{h} + \cdots$$

La combinazione di tali risultati ci conduce a vedere che l'esponenziale $e^{-\frac{k(2p-1)^2\pi^2 t}{r^2}}$ prende un coefficiente della forma

$$\frac{2(2p-1)\pi}{hr^3}(1+hy) + \frac{T}{r^4} + \frac{V}{r^5} + \cdots,$$

il quale, moltiplicato per la espressione (10), darà:

$$\frac{8m}{(2p-1)^2}\frac{1}{h\pi^2}(1+hy) + \frac{T_1}{r} + \frac{V_1}{r^2} + \cdots,$$

e, trascurando tutti i termini meno il primo, attesa la grandezza di r, si avrà che

$$\sum_1^{\infty}\frac{8m}{(2p-1)^2}\frac{1}{h\pi^2}(1+hy)\,e^{-\frac{k(2p-1)^2\pi^2 t}{r^2}} \tag{11}$$

rappresenterà la prima di quelle parti nelle quali abbiamo detto doversi scomporre la (1); e precisamente quella parte in cui si considerano tutti i valori della i che sono la serie dei numeri dispari naturali.

Consideriamo, in secondo luogo, la formola (6), cioè:

$$n_i r = 2q\pi - \frac{2q\pi}{hr}.$$

Saranno in questo caso:

$$\text{sen}\,n_i r = -\,\text{sen}\,\frac{2q\pi}{hr} = -\frac{2q\pi}{hr} + \frac{1}{2.3}\frac{8q^3\pi^3}{h^3r^3} - \cdots,$$

$$\cos n_i r = \cos\frac{2q\pi}{hr} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4q^2\pi^2}{h^2.r^2} + \cdots,$$

$$\frac{1}{n_i} = \frac{r}{2q\pi} + \frac{1}{2qh\pi} + \cdots,$$

e quindi il coefficiente di l, nella (9), viene

$$-\frac{r^2}{2q\pi} - \frac{2r}{2qh\pi} + \cdots,$$

e quello di m

$$-\frac{r^2}{2qh\pi}-\frac{3r}{2qh^2\pi}+\cdots,$$

nelle quali gli esponenti della r vanno sempre diminuendo; per cui la espressione (9) prende un valore della forma:

$$\frac{r^2}{2q\pi}\left(\frac{m}{h}-l\right)+\frac{r}{2qh\pi}\left(\frac{3m}{h}-2l\right)+L+\frac{M}{r}+\cdots. \tag{12}$$

Quanto agli altri elementi che costituiscono la formola (1), daranno, per questo valore di n_i:

$$\frac{2}{x}=\frac{2}{r}+\frac{2y}{r^2}+\cdots,$$

$$e^{-kn_i^2 t}=e^{-\frac{4kq^2\pi^2 t}{r^2}+\cdots},$$

$$\text{sen}\, n_i x=\text{sen}\left[\left(\frac{2q\pi}{r}-\frac{2q\pi}{hr^2}\right)(r-y)\right]=(1+hy)\frac{2q\pi}{hr}-\frac{L_1}{r^2}+\cdots,$$

$$r-\frac{1}{2n_i}\text{sen}\, 2n_i r=r+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2q\pi}+\frac{1}{2qh\pi}+\cdots\right)\text{sen}\,\frac{4q\pi}{hr}=r+\frac{1}{h}+\cdots,$$

e quindi l'esponenziale $e^{-\frac{4kq^2\pi^2 t}{r^2}}$ riceve per coefficiente la espressione

$$\frac{4q\pi}{hr^3}(1+hy)+\frac{S}{r^4}+\cdots,$$

che, moltiplicata per la (12), riducesi alla

$$\frac{2}{hr}\left(\frac{m}{h}-l\right)(1+hy)+\frac{S}{r^2}+\cdots.$$

Cosicchè la seconda delle parti in cui abbiamo supposto essere divisa la (1), può scriversi:

$$\sum_1^\infty{}_q\frac{2}{hr}\left(\frac{m}{h}-l\right)(1+hy)\,e^{-\frac{4kq^2\pi^2 t}{r^2}}, \tag{13}$$

nella quale vengono ad essere considerati tutti quei valori della i che sono la serie dei numeri pari naturali.

È facile il comprendere come i termini forniti dalla formola (13) si ponno trascurare, avuto riguardo alla grandezza di r; e quindi dovremo ricavare il valore di v della sola (11), che, sviluppata, dà:

$$(14) \qquad v = \frac{8m}{h\pi^2}(1 + hy)\left(e^{-\frac{k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{9}e^{-\frac{9k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{25}e^{-\frac{25k\pi^2 t}{r^2}} + \cdots\right).$$

Ecco la espressione che dà il valore della temperatura per un punto qualunque del globo; essa contiene quella trovata dal Poisson *), mentre la si ricava considerando il solo primo termine della (14); e quest'ultima ha, oltre a ciò, il vantaggio che, a luogo della indeterminata β del Poisson, contiene la quantità $\frac{8m}{h\pi^2}$ pure indeterminata, ma però evidentemente comparabile coi numeri desunti dalle nostre ordinarie misure; il che non è dimostrato per la β.

Questo valore di v, paragonato a quello desunto dalla (7), dà:

$$f = \frac{8m}{h\pi^2}\left(e^{-\frac{k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{9}e^{-\frac{9k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{25}e^{-\frac{25k\pi^2 t}{r^2}} + \cdots\right),$$

$$g = \frac{8m}{\pi^2}\left(e^{-\frac{k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{9}e^{-\frac{9k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{25}e^{-\frac{25k\pi^2 t}{r^2}} + \cdots\right),$$

le quali due formole sono di grande significato. La seconda di queste equazioni può servire anche a rendere palese la esattezza della espressione (14); di fatto, facendo in essa $t = 0$, si ha:

$$g = \frac{8m}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right).$$

Ora la somma della serie

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} \text{ **)}$$

e quindi sarà, in questo caso, $g = m$; il che doveva accadere, giacchè, al principio del tempo, la costante g era la m. Essendo, per $t = 0$, la $f = \frac{m}{h}$, sarà $l = \frac{m}{h}$; per cui la legge della distribuzione iniziale verrà espressa da $\frac{m}{h}(1 + hy)$.

Col mezzo della equazione (14), potremo anche calcolare esattamente la quantità

*) Poisson, *Théorie mathématique de la chaleur, Avec supplément* (Paris 1835-37), pag. 423.

**) Eulero, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748), tom. I, pag. 137.

di calore che la terra deve perdere attraverso la sua superficie nella unità di tempo. Infatti questa quantità, essendo in generale espressa da $\alpha b \frac{dv}{dy}$ *), dove α è la superficie, b la conducibilità esteriore, avremo, chiamandola Q:

$$Q = \frac{32 m r^2}{\pi} b \left(e^{-\frac{k\pi^2 t}{r^2}} + \frac{1}{9} e^{-\frac{9k\pi^2 t}{r^2}} + \cdots \right),$$

dalla quale scorgesi facilmente come la quantità di calore perduta diminuisce coll'aumentarsi il numero degli anni dall'origine del globo. L'abbassamento di temperatura durante un secolo è insensibile; ma la quantità di calore perduta è grandissima.

[C.], [G.].

*) FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur,* Paris 1822, pag. 110.

CII.

DEI CRITERJ PER DISTINGUERE I MASSIMI DAI MINIMI VALORI DELLE PRIMITIVE *).

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana,
Nuova Serie, tomo III (1851), pp. 400-409.

La ricerca dei criterj per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive venne ridotta da LEGENDRE a quella dei valori di alcune quantità indeterminate, per i quali, annullandosi alcuni termini del polinomio, variazione seconda della primitiva proposta, gli altri termini riduconsi a' prodotti di quadrati per quantità note, e dai segni di queste si hanno i criterj richiesti. JACOBI pel primo ha assegnato quei valori per le primitive semplici di funzioni composte di una sola funzione e delle sue derivate; ma il teorema da lui enunciato e dimostrato in seguito da BERTRAND, LEBESGUE, DELAUNAY è di difficile applicazione, come ne fanno prova i casi particolari considerati da quegli autori. Il prof. MAINARDI in un suo recente lavoro sul calcolo delle variazioni **) propone un nuovo metodo alla ricerca di quei valori; e con esso trova i valori di quelle indeterminate in qualche caso speciale, non senza però incontrare alcune difficoltà, le quali rendono l'analisi complicata quando si voglia trattare il problema in tutta la sua generalità. Il medesimo autore adopera con successo il proprio metodo anche nel caso in cui si consideri la primitiva doppia di una funzione composta di una sola funzione e delle derivate prime parziali di essa; ma non così allor-

*) [Cfr. V: t. I, pp. 35-38].

**) MAINARDI, *Ricerche sul calcolo delle variazioni* [Annali di scienze matematiche e fisiche, t. III, (1852), pp. 149-192, 379-383].

quando le derivate parziali si inalzano appena al secondo ordine, nè allorquando si tratti di una funzione composta di più funzioni e delle loro derivate, sebbene si limiti a considerare le derivate prime.

Lo scopo di questo scritto è di completare questa parte d'analisi, cioè di assegnare i valori di quelle indeterminate, considerando le primitive semplici composte di una o più funzioni e delle loro derivate fino all'ennesima; il caso delle primitive multiple si tratterà affatto analogamente.

LEMMA 1° — Se si ha una espressione della forma

$$\sum a_{r,s} x_r x_s \tag{1}$$

nella quale tanto la r che la s possono assumere i valori 0, 1, 2, 3, ..., n e si ritenga $a_{r,s} = a_{s,r}$; se saranno nulli i determinanti delle $\frac{n(n-1)}{2}$ espressioni quadratiche ternarie, le quali si ottengono ponendo nella generica

$$a_{r,r} x_r^2 + a_{s,s} x_s^2 + a_{n,n} x_n^2 + 2 a_{r,n} x_r x_n + 2 a_{s,n} x_s x_n + 2 a_{r,s} x_r x_s \tag{2}$$

in luogo di x_r, x_s le combinazioni a due a due delle n quantità $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; ed inoltre saranno nulli i determinanti delle n espressioni quadratiche binarie, che si ottengono sostituendo nella

$$a_{r,r} x_r^2 + a_{n,n} x_n^2 + 2 a_{r,n} x_r x_n \tag{3}$$

in luogo di x_r le n quantità $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; la espressione (1) sarà eguale alla

$$\frac{1}{a_{n,n}} \left(\sum a_{r,n} x_r \right)^2. \tag{4}$$

Ne risulta che le condizioni per passare dalla (1) a quest'ultima sono di numero $\frac{n(n+1)}{2}$. Queste condizioni si ponno anche assegnare in generale; infatti, essendo nullo il determinante della (2), sussisterà l'equazione:

$$(a_{r,n}^2 - a_{n,n} a_{r,r})(a_{s,n}^2 - a_{n,n} a_{s,s}) = (a_{n,n} a_{r,s} - a_{r,n} a_{s,n})^2;$$

ed essendo nullo il determinante delle (3), si ha:

$$a_{r,n}^2 - a_{n,n} a_{r,r} = 0;$$

quindi la (1) si ridurrà alla (4) allorquando sieno soddisfatte $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni analoghe alla

$$a_{n,n} a_{r,s} - a_{r,n} a_{s,n} = 0, \tag{5}$$

ed n equazione simili alla

$$(6) \qquad a_{r,n}^2 - a_{n,n} a_{r,r} = 0.$$

LEMMA 2° — È noto che il valore di y funzione di x, che rende massima o minima la primitiva

$$\int_a^b F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) dx,$$

viene fornito dall'integrazione della equazione:

$$(7) \qquad F'(y) - [F'(y')]' + [F'(y'')]'' - \cdots + (-1)^n [F'(y^{(n)})]^{(n)} = 0.$$

Questa equazione, essendo alle derivate dell'ordine $2n^{\text{esimo}}$, la sua primitiva completa conterrà $2n$ costanti arbitrarie, che indicheremo con $h_1, h_2, \ldots, h_n, k_1, k_2, \ldots, k_n$. Si rappresenti questa primitiva colla

$$y = \varphi(x, h_1, h_2, \ldots, h_n, k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

e suppongasi sostituito questo valore nell'equazione (7). La equazione identica risultante derivata parzialmente rispetto a ciascuna delle costanti darà $2n$ equazioni; si moltiplichino queste ordinatamente per $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ e, posto

$$p_1 \frac{\partial y}{\partial h_1} + q_1 \frac{\partial y}{\partial k_1} = u_1, \quad \ldots, \quad p_n \frac{\partial y}{\partial h_n} + q_n \frac{\partial y}{\partial k_n} = u_n,$$

sommando la prima e la $(n+1)^{\text{esima}}$, la seconda e la $(n+2)^{\text{esima}}$, e così di seguito, si avranno n equazioni della forma:

$$(8) \sum A_{0,r} u_m^{(r)} - \left(\sum A_{1,r} u_m^{(r)}\right)' + \left(\sum A_{2,r} u_m^{(r)}\right)'' - \cdots + (-1)^n \left(\sum A_{n,r} u_m^{(r)}\right)^{(n)} = 0,$$

nella quale

$$u_m^{(r)} = \frac{d^r u_m}{d x^r},$$

e gli accenti all'esterno delle parentesi indicano derivate rispetto ad x. I coefficienti $A_{0,0}, A_{0,1}, \ldots$ sono i valori delle quantità $F''(y)$, $F''(y, y')$, $\ldots$ corrispondenti al valore di y che soddisfa la (7).

Ciò posto, rammentiamo che il valore della y funzione di x, che soddisfa alla (7), corrisponderà ad un massimo ovvero ad un minimo della primitiva proposta, secondo che riescirà negativa o positiva la primitiva della espressione

$$(9) \qquad \sum A_{r,s} \omega^{(r)} \omega^{(s)},$$

nella quale le r, s ed i coefficienti $A_{r,s}$ hanno i valori suddetti; ω è la variazione prima della funzione y ed $\omega^{(r)} = \frac{d^r \omega}{d x^r}$.

La espressione (9) riducesi alla forma seguente:

$$\left(\sum \alpha_{r_1,s_1} \omega^{(r_1)} \omega^{(s_1)}\right)' + \sum a_{r,s} \omega^{(r)} \omega^{(s)}, \tag{10}$$

nella quale le r_1, s_1 assumono i valori $0, 1, \ldots, n-1$; purchè sieno soddisfatte le $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni seguenti:

$$a_{0,0} + \alpha'_{0,0} = A_{0,0}, \qquad a_{1,1} + \alpha'_{1,1} + 2\alpha_{0,1} = A_{1,1}, \quad \ldots, \quad a_{n,n} = A_{n,n},$$

e la primitiva della (9) sarà identica a quella della

$$\sum a_{r,s} \omega^{(r)} \omega^{(s)}. \tag{11}$$

Si osservi che i coefficienti dei termini componenti quest'ultima espressione sono in numero $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, e che di questi un numero $\frac{n(n+1)}{2}$ si possono ritenere arbitrarj, essendo tale il numero delle $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{1,1}$, ... La espressione (11), allorquando pongasi

$$\sum a_{0,r} \omega^{(r)} = Y_0, \qquad \sum a_{1,r} \omega^{(r)} = Y_1, \quad \ldots, \quad \sum a_{n,r} \omega^{(r)} = Y_n, \tag{12}$$

eguaglia la

$$\omega Y_0 + \omega' Y_1 + \omega'' Y_2 + \cdots + \omega^{(n)} Y_n.$$

Dalle equazioni (12), osservando alle (9), (10), si hanno poi facilmente le seguenti:

$$\sum A_{0,r} \omega^{(r)} = Y_0 + \left(\sum \alpha_{0,r_1} \omega^{(r_1)}\right)',$$

$$\sum A_{1,r} \omega^{(r)} = Y_1 + \sum \alpha_{0,r_1} \omega^{(r_1)} + \left(\sum \alpha_{1,r_1} \omega^{(r_1)}\right)',$$

. . . .

$$\sum A_{n-1,r} \omega^{(r)} = Y_{n-1} + \sum \alpha_{n-2,r_1} \omega^{(r_1)} + \left(\sum \alpha_{n-1,r_1} \omega^{(r_1)}\right)',$$

$$\sum A_{n,r} \omega^{(r)} = Y_n + \sum \alpha_{n-1,r_1} \omega^{(r_1)}.$$

Derivando rispetto ad x una volta la seconda di queste equazioni, due volte la terza, tre la quarta e così via, quindi aggiungendole l'una all'altra con opportuni segni,

si ha:

$$\sum A_{0,r}\omega^{(r)} - \left(\sum A_{1,r}\omega^{(r)}\right)' + \cdots + (-1)^n \left(\sum A_{n,r}\omega^{(r)}\right)^{(n)}_t$$
$$= Y_0 - Y'_1 + \cdots + (-1)^n Y_n^{(n)}.$$

Ma il primo membro di questa equazione annullasi, attesa la equazione (8), allorquando si ponga in esso ciascuna delle $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in luogo della ω; per cui si avrà:

(13) $$Y_0 - Y'_1 + Y''_2 - \cdots + (-1)^n Y_n^{(n)} = 0$$

per

$$\omega = u_1, u_2, \ldots, u_n.$$

Ognuna delle $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ contiene $n+1$ coefficienti, ma nella Y_1 trovasi un coefficiente che esiste già nella Y_0; nella Y_2 due coefficienti, l'uno dei quali trovasi nella Y_0, l'altro nella Y_1; e così di seguito. Dispongasi di n dei coefficienti della Y_0, cioè di tutti i coefficienti meno l' $a_{0,n}$ che trovasi nella Y_n; di $n-1$ coefficienti della Y_1, cioè di tutti i coefficienti meno l' $a_{0,1}$ che trovasi nella Y_0, e l' $a_{1,n}$ che esiste nella Y_n; di $n-2$ coefficienti di Y_2, ossia di tutti i coefficienti meno i due che trovansi nelle Y_0, Y_1 e dell' $a_{2,n}$ che si rinviene nella Y_n; così di $n-3$ coefficienti della Y_3 e finalmente di un coefficiente della Y_{n-1} per rendere soddisfatte, qualunque sia ω, le equazioni:

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad \ldots, \quad Y_{n-1} = 0.$$

In questo modo vengono determinati gli $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti arbitrarj, e per la (13) sussisteranno le

$$Y_0 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \ldots, Y_{n-1} = 0, \qquad Y_n = 0$$

pei valori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ di ω. La $Y_r = 0$ fornisce quindi le n equazioni:

$$a_{r,0}u_1 + a_{r,1}u'_1 + a_{r,2}u''_1 + \cdots + a_{r,n}u_1^{(n)} = 0,$$
$$a_{r,0}u_2 + a_{r,1}u'_2 + a_{r,2}u''_2 + \cdots + a_{r,n}u_2^{(n)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{r,0}u_n + a_{r,1}u'_n + a_{r,2}u''_n + \cdots + a_{r,n}u_n^{(n)} = 0,$$

dalle quali, ponendo

$$D_s = (-1)^{n+s} \begin{vmatrix} u_1 & u'_1 \ldots u_1^{(s-1)} & u_1^{(s+1)} \ldots u_1^{(n)} \\ u_2 & u'_2 \ldots u_2^{(s-1)} & u_2^{(s+1)} \ldots u_2^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u'_n \ldots u_n^{(s-1)} & u_n^{(s+1)} \ldots u_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \dots & u_1^{(n-1)} \\ u_2 & u_2' & \dots & u_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_n' & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

si avrà in generale:

(14) $$a_{r,s} = a_{r,n} \frac{D_s}{\Delta},$$

e quindi anche:

(15) $$a_{n,s} = a_{n,n} \frac{D_s}{\Delta},$$

il quale valore sostituito nella antecedente dà:

$$a_{r,s} = A_{n,n} \frac{D_r D_s}{\Delta^2},$$

espressione generale dei coefficienti della (11).

Ora si osservi che le (14), (15) dànno evidentemente

$$a_{n,n} a_{r,s} - a_{r,n} a_{s,n} = 0,$$

ed anche

$$a_{r,n}^2 - a_{n,n} a_{r,r} = 0;$$

dunque pel Lemma 1° la espressione (11) si muterà nella

$$\frac{1}{A_{n,n}} \left(\sum a_{r,n} \omega^{(r)}\right)^2,$$

e quindi il segno della primitiva della (11) medesima dipenderà da quello di $A_{n,n}$.

Volendosi ricercare le formole analoghe alle superiori allorquando si considerino primitive semplici di funzioni composte di più funzioni, oppure primitive multiple, converrà al Lemma 1° sostituire la seguente proposizione, la quale comprende il Lemma medesimo.

Una espressione della forma

$$\sum a_{r,s} x_r x_s$$

sarà positiva, allorquando fra i coefficienti di essa abbiano luogo le relazioni:

(16) $a_{n,n} > 0, \quad D_{n-1,n-1} \geqq 0, \quad D_{n-2,n-2} \geqq 0, \dots, D_{r,r} \geqq 0, \dots, \quad D_{0,0} \geqq 0;$

e sarà negativa, allorquando sieno:

(17) $a_{n,n} < 0, \quad D_{n-1,n-1} \geqq 0, \quad D_{n-2,n-2} \leqq 0, \dots, (-1)^{n-r} D_{r,r} \leqq 0, \dots, (-1)^n D_{0,0} \leqq 0,$

indicando con $D_{r,r}$ il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{n,n} & a_{n,n-1} & \dots & a_{n,r} \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} & \dots & a_{n-1,r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,n} & a_{r,n-1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix}.$$

Si consideri ora la primitiva semplice di una funzione composta di due funzioni e delle loro derivate fino alle n^{esime}. Si otterranno due equazioni analoghe alla (8), ossia:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum A_{0,r} u_m^{(r)} + \sum C_{0,r} v_m^{(r)} - \left(\sum A_{1,r} u_m^{(r)} + \sum C_{1,r} v_m^{(r)}\right)' + \cdots \\ &\qquad \cdots + (-1)^n \left(\sum A_{n,r} u_m^{(r)} + \sum C_{n,r} v_m^{(r)}\right)^{(n)} = 0, \\ &\sum B_{0,r} v_m^{(r)} + \sum C_{r,0} u_m^{(r)} - \left(\sum B_{1,r} v_m^{(r)} + \sum C_{r,1} u_m^{(r)}\right)' + \cdots \\ &\qquad \cdots + (-1)^n \left(\sum B_{n,r} v_m^{(r)} + \sum C_{r,n} u_m^{(r)}\right)^{(n)} = 0, \end{aligned}\right.$$

nelle quali la m può assumere i valori $1, 2, 3, \dots, 2n$ e le $u_1, u_2, \dots, u_{2n}, v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ sono formate colle derivate parziali delle funzioni componenti y, z rispetto alle costanti arbitrarie e con quantità indeterminate. I coefficienti $A_{0,0}, \dots, B_{0,0}, \dots, C_{0,0}, \dots$ sono i valori delle $F''(y), \dots, F''(z), \dots, F''(y, z), \dots$ corrispondenti a quei valori di y, z che rendono massima o minima la primitiva proposta. Si avranno quindi le

$$A_{r,s} = A_{s,r}, \qquad B_{r,s} = B_{s,r}.$$

Questi valori delle y, z corrisponderanno ad un massimo o ad un minimo, secondo che sarà negativa o positiva la primitiva della

$$(19)\qquad \sum A_{r,s}\, \omega^{(r)} \omega^{(s)} + \sum B_{r,s}\, \theta^{(r)} \theta^{(s)} + 2 \sum C_{r,s}\, \omega^{(r)} \theta^{(s)},$$

nella quale ω, θ sono le variazioni prime di y e di z.

La (19) può ridursi alla

$$(20)\qquad \sum a_{r,s}\, \omega^{(r)} \omega^{(s)} + \sum b_{r,s}\, \theta^{(r)} \theta^{(s)} + 2 \sum c_{r,s}\, \theta^{(r)} \omega^{(s)},$$

ed un numero $n(2n+1)$ coefficienti di questa ponno ritenersi come arbitrarj. Ponendo

per brevità:

$$\sum a_{0,r}\omega^{(r)} + \sum c_{0,r}\theta^{(r)} = Y_0, \ldots, \sum a_{n,r}\omega^{(r)} + \sum c_{n,r}\theta^{(r)} = Y_n,$$

$$\sum b_{0,r}\theta^{(r)} + \sum c_{r,0}\omega^{(r)} = Z_0, \ldots, \sum b_{n,r}\theta^{(r)} + \sum c_{r,n}\omega^{(r)} = Z_n,$$

dimostrasi facilmente che per le equazioni (18) sussistono le due seguenti:

$$Y_0 - Y_1' + Y_2'' - \cdots + (-1)^n Y_n^{(n)} = 0,$$

$$Z_0 - Z_1' + Z_2'' - \cdots + (-1)^n Z_n^{(n)} = 0,$$

per $\omega = u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ e per $\theta = v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$.

Determinando gli $n(2n+1)$ coefficienti arbitrarj in modo che abbiano luogo le

$$(21) \qquad Y_0 = 0, \ldots, Y_{n-1} = 0, \qquad Z_0 = 0, \ldots, Z_{n-1} = 0$$

qualunque sieno ω, θ; sussisteranno simultaneamente pei valori suddetti di ω e di θ le

$$Y_0 = 0,\ Y_1 = 0, \ldots, Y_n = 0, \qquad Z_0 = 0,\ Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0.$$

Da queste si hanno i valori di tutti i coefficienti. Posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \ldots & u_1^{(n-1)} & v_1 & v_1' & \ldots & v_1^{(n-1)} \\ u_2 & u_2' & \ldots & u_2^{(n-1)} & v_2 & v_2' & \ldots & v_2^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{2n} & u_{2n}' & \ldots & u_{2n}^{(n-1)} & v_{2n} & v_{2n}' & \ldots & v_{2n}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$H_s = u_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_1^{(s)}} + u_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_2^{(s)}} + \cdots + u_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2n}^{(s)}},$$

$$K_s = v_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_1^{(s)}} + v_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_2^{(s)}} + \cdots + v_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{2n}^{(s)}},$$

$$T_s = u_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_1^{(s)}} + u_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_2^{(s)}} + \cdots + u_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_{2n}^{(s)}},$$

$$U_s = v_1^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_1^{(s)}} + v_2^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_2^{(s)}} + \cdots + v_{2n}^{(n)} \frac{\partial \Delta}{\partial v_{2n}^{(s)}},$$

si hanno dapprima:

$$a_{r,s} = a_{r,n}\frac{H_s}{\Delta} + c_{r,n}\frac{K_s}{\Delta}, \qquad b_{r,s} = b_{r,n}\frac{U_s}{\Delta} + c_{n,r}\frac{T_s}{\Delta},$$

$$c_{r,s} = a_{r,n}\frac{T_s}{\Delta} + c_{r,n}\frac{U_s}{\Delta}, \qquad c_{s,r} = b_{r,n}\frac{K_s}{\Delta} + c_{n,r}\frac{H_s}{\Delta}.$$

Da queste si ottengono i valori delle $a_{n,r}$, $c_{n,r}$, $b_{n,r}$, $c_{r,n}$, i quali, sostituiti nelle medesime, dànno i valori generali richiesti:

$$a_{r,s} = A_{n,n}\frac{H_r H_s}{\Delta^2} + B_{n,n}\frac{K_r K_s}{\Delta^2} + C_{n,n}\frac{K_r H_s + K_s H_r}{\Delta^2},$$

$$b_{r,s} = A_{n,n}\frac{T_r T_s}{\Delta^2} + B_{n,n}\frac{U_r U_s}{\Delta^2} + C_{n,n}\frac{T_r U_s + T_s U_r}{\Delta^2},$$

$$c_{r,s} = A_{n,n}\frac{H_r T_s}{\Delta^2} + B_{n,n}\frac{K_r U_s}{\Delta^2} + C_{n,n}\frac{K_r T_s + H_r U_s}{\Delta^2},$$

$$c_{s,r} = A_{n,n}\frac{T_r H_s}{\Delta^2} + B_{n,n}\frac{U_r K_s}{\Delta^2} + C_{n,n}\frac{K_s T_r + H_s U_r}{\Delta^2}.$$

Osserviamo che questi valori soddisfano alle

$$(a_{r,n}^2 - a_{n,n}a_{r,r})(c_{n,s}^2 - a_{n,n}b_{s,s}) = (a_{n,n}c_{r,s} - a_{r,n}c_{n,s})^2,$$

$$(c_{n,r}^2 - a_{n,n}b_{r,r})(c_{n,s}^2 - a_{n,n}b_{s,s}) = (a_{n,n}b_{r,s} - c_{n,r}c_{n,s})^2,$$

. . . .

cioè ai determinanti delle espressioni quadratiche ternarie fornite dalla (20); quindi, per la proposizione enunciata più addietro, il segno della (20) medesima dipende da quello di $A_{n,n}$ e da quello di $A_{n,n}B_{n,n} - C_{n,n}^2$; cioè sarà positiva, allorquando sia:

$$A_{n,n} > 0, \qquad A_{n,n}B_{n,n} - C_{n,n}^2 > 0;$$

e negativa, se risulti:

$$A_{n,n} < 0, \qquad A_{n,n}B_{n,n} - C_{n,n}^2 > 0.$$

Il modo col quale vennero trovate le formole superiori estendesi facilmente alla ricerca delle formole analoghe nel caso di un maggior numero di funzioni componenti, ed in quello delle primitive multiple. Converrà però osservare che, allorquando le derivate d'ordine più alto delle funzioni componenti, o le derivate parziali dell'ordine più alto, non

siano del medesimo ordine, diminuirà il numero dei coefficienti arbitrarj contenuti nelle equazioni analoghe alle (21), ma insieme diminuirà, o si potrà diminuire, anche il numero delle costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione e quindi il numero delle $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$.

[Tn.].

CIII.

PREFAZIONE AD UNA MEMORIA DI G. PIOLA *).

Memorie dell'Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, serie I, volume III (1852), pp. 283-298.

L'idraulica razionale o la determinazione analitica delle leggi del movimento dei fluidi, sebbene abbia formato soggetto alle speculazioni di molti e distinti geometri, è tuttora avvolta in gravissime difficoltà. E, ciò che senza dubbio può dirsi strano, trattandosi di una scienza che appartiene alle *esatte*, la maggior parte delle Memorie d'idraulica che videro la luce in questi ultimi tempi, contengono semplici osservazioni critiche intorno a lavori già esistenti, fonti di lunghe polemiche le quali poco contribuirono all'avanzamento della scienza. Donde tali discordanze di risultamenti e di opinioni? Forse che le equazioni fondamentali comunemente accettate non sieno sufficienti alla spiegazione dei fenomeni, come alcuni pretendono? O forse che lo studio delle teorie idrauliche non debbasi disgiungere da quello dell'idraulica sperimentale, come si fece sino ad ora; anzi debbano l'esperienza e l'osservazione fornire i mezzi principali e servire di guida alle ricerche astratte?

Io non entrerò a prendere ad esame queste gravi quistioni; ma, incaricato della pubblicazione d'una Memoria postuma intorno al moto dei liquidi nei canali e nei fiumi, dovuta all'insigne matematico Gabrio Piola, di cui le scienze risentono la prematura morte, mi limiterò a farla precedere da un breve sunto storico intorno a quelle parti dell'idraulica, le quali il Piola avea già fatto scopo di propri studj, e di altre Me-

*) *Ulteriori considerazioni sul moto dell'acqua in vasi, canali e fiumi.* Memoria postuma di Gabrio Piola, pubblicata per cura del Prof. Francesco Brioschi [Memorie dell'Istituto Lombardo, t. III (1852), pp. 299-367].

morie stampate, e ciò nell'intento di classificare i lavori di lui nella storia di questa importante parte della fisica matematica. Le Memorie idrauliche del PIOLA vertono intorno al moto dei liquidi, comunemente denominato a due ed a tre coordinate; intorno questo ramo dell'idrodinamica s'aggireranno le seguenti ricerche storiche.

La trattazione speciale del problema del moto di liquidi in un piano è dovuta al d'ALEMBERT, mentre teniamo da lui la integrazione della equazione alle derivate parziali del secondo ordine col mezzo di due funzioni arbitrarie. Le formole fondamentali da esso date comparirono dapprima nell'opera *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* *), poi nei tomi primo e quinto dei celebri *Opuscules mathématiques* **). Ma, quasi contemporaneamente, anzi prima che vedessero la luce gli Opuscoli del d'ALEMBERT, nella solenne Memoria *Principes généraux sur le mouvement des fluides* ***), EULERO avea applicate le formole generali poste dal d'ALEMBERT, e da lui ottenute di nuovo con maggiore generalità e semplicità, al caso del moto a due coordinate, lasciando però quella sua analisi senza esempio, e senza mezzo di verificazione alcune sue asserzioni. È in essa Memoria che, per la prima volta, si riscontrano le due proprietà delle trajettorie descritte dalle molecole fluide nel loro movimento; cioè che le equazioni delle trajettorie non ponno differire fra loro se non pel mutato valore di una costante, la quale è bensì costante per tutta una trajettoria; e che le equazioni delle pareti del vaso in cui il fluido si muove ponno essere ambedue date ad arbitrio, purchè anch'esse si possano dedurre cambiando il valore ad una costante, dalla equazione generale di tutte le trajettorie. Queste proprietà formarono più tardi soggetto a molte discussioni; anzi lo stesso d'ALEMBERT nega l'esistenza della seconda di esse, allorquando nel tomo I dei suoi *Opuscules* (pag. 140), dopo aver assegnate le forme alle quali devonsi ridurre le equazioni dalle pareti affinchè rendasi *possibile* la ricerca delle leggi del moto del fluido, asserisce che altrimenti il problema non può essere risoluto analiticamente e rigorosamente, *quantunque un grande geometra abbia preteso che poteva sempre esserlo.*

Di EULERO esiste un'altra Memoria ****) sullo stesso argomento meno conosciuta della superiore; in essa tratta il problema del moto permanente dell'acqua nei canali a superficie libera, supposto che il movimento avvenga in piani verticali, e giunge alla determinazione del valore della pressione in un punto qualunque della massa fluida in moto, valore identico a quello che venne dato di poi dal signor PIOLA nel Capo II della sua Memoria: *Nuove ricerche per una risoluzione più rigorosa di vari problemi sul moto*

---

*) [Paris, 1752].

**) [Paris, 1761-80, in 8 volumi].

***) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1755.

****) *Recherches sur le mouvement des rivières* [Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760].

dell'acqua *). Notisi che la ipotesi ammessa dall'EULERO, in quelle sue ricerche, fa capo a quella del moto per filetti, come la chiamò il signor CAUCHY in una sua Memoria **), e consiste nel supporre che il movimento avvenga in modo che due molecole non possano occupare successivamente la stessa posizione senza descrivere la medesima curva; la quale ipotesi trovasi anche accennata in vari luoghi nell'opera del d'ALEMBERT. Devesi al professore TARDY ***) l'aver dimostrato come essa conduca alle formole generali trovate dal PIOLA pel moto a due ed a tre coordinate.

Nel 1766 veniva pubblicato il terzo volume dei *Miscellanea Taurinensia* e facea parte di esso la tanto nota Memoria di LAGRANGE: *Solution de différents Problèmes de calcul intégral* ****). In quella Memoria, quale applicazione di un metodo per la determinazione della forma di una funzione avente una data proprietà, consacra un capitolo alle *Solutions de quelques problèmes sur le mouvement des fluides* †), ed ivi discute il caso del movimento dell'acqua in un piano, essendo il moto simmetrico attorno ad una retta, e porta l'esempio delle pareti rettilinee; quindi suppone il moto qualsiasi e le pareti rettilinee ed inclinate; e finalmente tratta il caso delle pareti rettilinee e parallele. Le forme per le funzioni arbitrarie, introdotte dalla integrazione della nota equazione alle derivate del secondo ordine trovate dal LAGRANGE col proprio metodo, sono più generali di quelle date in seguito dal VENTUROLI e dal TADINI; queste ponno però ridursi alle prime quando si abbia riguardo, come ha dimostrato il signor TARDY, alle funzioni complementarie introdotte dalle integrazioni di equazioni alle differenze finite. I risultamenti ottenuti dal LAGRANGE furono poi verificati in altro modo dal d'ALEMBERT, come scorgesi dalla terza delle lettere da lui dirette al LAGRANGE medesimo e stampate alla fine di quel volume terzo.

Al LAPLACE ††) ed al MONGE †††) devonsi le prime ricerche intorno alla determinazione delle funzioni arbitrarie col mezzo delle equazioni alle differenze finite, allorquando siano note alcune condizioni particolari del fenomeno rappresentato colle equa-

*) Memorie dell'Istituto Lombardo, t. I (1840-42), pp. 217-311.

**) *Sur une espèce particulière de mouvement des fluides* [Journal de l'École Polytechnique, cahier XIX, t. XII (1823), pp. 204-214].

***) *Sopra alcuni punti della teoria del moto dei liquidi.* Firenze, 1847.

****) Miscellanea Taurinensia, t. III, parte II, pp. 179-380.

†) Miscellanea Taurinensia, t. III, parte II, pag. 205.

††) *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies* [Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, t. VII (1773), pp. 37-163].

†††) *Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles* [Miscellanea Taurinensia, t. V, parte II (1773), pp. 16-78, 79-122; v. anche: Mémoires de Mathématique et de Physique présentés etc., t. VII (1773), pp. 267-300, 305-327].

zioni alle derivate parziali; alcune più recenti dell'ABEL *) non sono che ripetizioni di quelle, poste sotto più eleganti forme. I noti metodi di quei distinti geometri, ora quasi interamente abbandonati, valgono a raggiungere lo scopo in varie questioni; ma giova il riflettere che ogni qualvolta le condizioni particolari conosciute saranno tutte necessarie per la ricerca della equazione alle differenze finite, le forme che ne risulteranno per le funzioni arbitrarie non saranno le generali, mentre non deduconsi dagli integrali completi di quelle equazioni e non si avrebbero altre condizioni disponibili alla determinazione delle forme delle funzioni complementarie che dovrebbero introdursi, onde rendere completi gl'integrali medesimi. Ciò appunto accade nei problemi d'idraulica; talchè, come fece anche osservare il signor TARDY, fino a tanto che non vengano imposte nuove condizioni, le formole ottenute debbono piuttosto riguardarsi come trasformazioni analitiche, che, togliendo l'arbitrarietà in una parte per soddisfare a talune condizioni, la riportano sopra un'altra. In questa sua Memoria il LAPLACE tratta a modo d'esempio e come problema puramente analitico il moto simmetrico attorno ad un asse di un velo fluido contenuto da parete rettilinea e nella espressione da lui data per la funzione arbitraria si rinviene appunto la funzione complementaria introdotta dalla integrazione eseguita sopra la equazione alle differenze finite. LAGRANGE nella sua Memoria *Sur la théorie du mouvement des fluides,* inserita fra quelle dell'Accademia di Berlino per l'anno 1781, la quale, rifusa, compone la Sezione XI della parte seconda della *Mécanique analytique,* col mezzo di nuove considerazioni ritrova le formole generali del movimento, ed ammessa la integrabilità del noto *trinomio differenziale* delle velocità, supposta infinitamente piccola una delle dimensioni della massa fluida al confronto delle altre due, applica le formole medesime al caso del movimento del fluido in un recipiente stretto e quasi verticale, ed a quello del moto del fluido in un canale poco profondo e quasi orizzontale. Dai risultamenti ottenuti in queste ricerche ne trassero i geometri grande vantaggio per ulteriori indagini.

Intorno la teoria del moto dell'acqua in un piano scrisse DOMENICO COCOLI in una sua dissertazione **) coronata dalla Reale Accademia di Mantova. Nella prima parte di questo lavoro, trovate le formole generali pel moto dei fluidi, le applica al caso che le molecole fluide si muovano in un piano, ammessa la integrabilità dei *binomj differenziali* delle forze e delle velocità. In questo modo arriva a determinare i valori delle velocità e la equazione delle trajettorie descritte dalle molecole fluide, valori ed equazione contenenti due funzioni arbitrarie; ne ritrae che la equa-

*) *Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable,* Œuvres complètes; Éd. HOLMBOE, (Christiania, 1839), t. II, pp. 246-248.

**) COCOLI, *Dissertazione sopra il quesito: stabilire la vera teoria delle acque uscenti da fori aperti ne' vasi, e mostrare in quali circostanze possa ella applicarsi alle acque correnti negli alvei naturali.* Brescia, 1783.

zione della curva del vaso deve avere la forma dell'equazione della curva descritta da una delle molecole fluide; ed osserva finalmente dover sussistere *analogia* fra le funzioni arbitrarie suddette e quelle che esprimono la natura della curvatura del vaso. Le difficoltà che l'autore incontra nel rintracciare queste analogie lo determinano ad abbandonare i fatti tentativi, ed a trattare il moto dell'acqua uscente dai fori aperti in fondo ai vasi e negli alvei naturali facendo uso dell'ipotesi del moto lineare.

Le difficoltà incontrate dal COCOLI vennero superate dal VENTUROLI, il quale in una appendice alla seconda edizione degli *Elementi di Meccanica ed Idraulica* *) riprese di bel nuovo il problema del moto di un velo d'acqua. Ritenuti integrabili i *binomj differenziali* delle forze e delle velocità, giunse il professore VENTUROLI alla nota equazione alle derivate parziali del secondo ordine, della quale assume l'integrale e perviene, col mezzo di una equazione alle differenze finite del primo ordine ed a coefficienti variabili, alla determinazione delle funzioni arbitrarie, giovandosi delle equazioni delle pareti tra le quali suppone scorra il fluido. Applica quindi le formole ottenute al caso delle pareti rettilinee, e giunge ai due noti teoremi: dover essere rettilinee tutte le trajettorie, dover essere la velocità in un punto qualunque di ciascuna trajettoria inversamente proporzionale alla distanza di esso dal punto d'incontro delle rette entro cui supponesi raccolto il velo fluido.

Il problema del moto dell'acqua a due coordinate venne poco dopo il VENTUROLI trattato dal TADINI nella Memoria che ha per titolo *Del movimento e della misura delle acque correnti* **). Opina il signor TADINI non essere completo l'integrale dato comunemente col mezzo di due funzioni arbitrarie della nota equazione binomia alle derivate del secondo ordine; giacchè, come egli dice, dovendo i valori delle velocità essere reali, dovrebbero quelle funzioni avere la medesima forma. Quindi all'integrale ordinario ne sostituisce un altro che contiene quattro funzioni arbitrarie, le quali poi pel caso particolare del moto dei fluidi, cioè per la realtà dei valori delle velocità, riduconsi a due. All'erroneo ragionamento del TADINI, il quale trovavasi già in vari luoghi del tomo quinto degli *Opuscoli* del d'ALEMBERT, accennò il professore PLANA ***) in alcune riflessioni intorno l'opera suddetta del TADINI, dimostrando non essere d'uopo abbiano forma eguale le due funzioni arbitrarie perchè risultino reali i valori delle vèlocità, e come altrimenti si possa soddisfare a quella condizione, arrivando alla medesima espressione alla quale perviene il TADINI partendo dal primo integrale con quattro funzioni arbitrarie.

---

*) [Bologna, 1809-1810, in tre volumi].

**) Nuova raccolta d'autori italiani che trattano del moto dell'acque, t. II, Bologna (1824), pp. 139-300.

***) Biblioteca Italiana, t. III (1816), pp. 466-485.

La osservazione del professore PLANA, ripetuta più tardi dal professore PADULA *), trovavasi già nella prima delle citate Memorie dell'EULERO ed in una di LAGRANGE **). Però il signor SAN MARTINO, forse non conoscendo i lavori dell'EULERO e del PLANA, nella sua *Memoria sulla portata dei fiumi* ***) ritiene ancora eguali le forme delle funzioni arbitrarie a motivo della circostanza fisica del problema †); quindi sviluppate quelle funzioni secondo il teorema di TAYLOR, scompajono i termini contenenti l'immaginario, perchè eguali e di segno contrario, e si ottiene l'integrale per mezzo di una serie contenente una sola funzione arbitraria. Questa espressione è dal professore SAN MARTINO ritenuta quale integrale completo dell'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, appoggiandosi forse a quanto scrisse POISSON nella *Théorie mathématique de la chaleur* ††): « quand l'intégrale complète d'une équation aux différences partielles de l'ordre n est « exprimée par des séries, le nombre des fonctions arbitraires peut s'abaisser au des- « sous de n ».

Il TADINI nell'opera succitata discute anche il caso del moto fra pareti rettilinee e le formole a cui giunge, ridimostrate poi dal professore PLANA nelle accennate riflessioni con maggiore speditezza ed eleganza, coincidono con quelle trovate dal VENTUROLI, come addimostra il VENTUROLI medesimo nella terza edizione degli *Elementi di Meccanica ed Idraulica* †††). Finalmente nell'annotazione V all'opera stessa vengono esposte dal TADINI alcune osservazioni per la trattazione del problema, supposto che il fluido scorra fra pareti curvilinee.

Devesi al professore VENTUROLI l'avere applicate le formole generali pel moto dei fluidi poste da EULERO e da LAGRANGE senza trascurare alcuna dimensione. Egli, nelle *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontificj per l'anno* 1821, prese a trattare il caso dell'efflusso dai vasi conici. Ammessi i trinomj delle forze e delle velocità *differenziali esatti,* si vale della permanenza delle molecole fluide alla superficie del vaso in cui il fluido è contenuto per determinare la equazione della trajettoria ed i valori della velocità e della pressione. Con questo mezzo giunge, dopo brevi calcoli, a trovare le leggi di quel movimento; esse si ponno ridurre alle due seguenti: 1° tutte le particelle dell'acqua contenuta nel vaso conico discendono per linee convergenti al vertice del cono; 2° per un medesimo istante di tempo tutte le molecole col-

*) *Sull'ordinarie equazioni generali relative al moto de' liquidi* [Atti degli scienziati italiani, 1845, pp. 1019-1020].

**) *Sur la construction des Cartes Géographiques* [Mémoires de l'Académie de Berlin, 1779].

***) [Catania, 1841].

†) La medesima osservazione trovasi nel trattato d'Idraulica del sig. WEBSTER: *The Theory of the Equilibrium and Motion of Fluids,* Cambridge, 1836, pag. 144.

††) [Paris, 1835-37; in due volumi].

†††) [Milano, 1817; in due volumi].

locate in una superficie sferica avente il centro, che coincide col vertice del cono, si muovono con eguale velocità, e le velocità di due molecole situate in due differenti superficie sferiche son reciprocamente proporzionali ai quadrati dei raggi di esse superficie. Tali semplicissimi risultati vennero confermati in seguito dal PIOLA, discussi e confutati dal BRIGHENTI, dal TURAZZA, dal BELLAVITIS.

Dietro le traccie del professore VENTUROLI e quasi a commento dell'appendice agli *Elementi di Meccanica* citata più sopra, il signor PIOLA, nella *Memoria sull'applicazione dei principj della Meccanica Analitica del* LAGRANGE *ai principali problemi,* coronata nel 1824 dall'I. R. Istituto delle Scienze di Milano *), attenendosi a quanto avevano insegnato LAPLACE e MONGE intorno alla determinazione delle funzioni arbitrarie, fece scopo all'applicazione delle sue formole il problema del moto fra pareti rettilinee, confermando in tal modo i risultati del VENTUROLI; quindi considerò il caso delle pareti curvilinee, accennato ma non trattato di proposito dal VENTUROLI e dal TADINI, e tentò discutere ad esempi l'essere la curva della parete la iperbole apolloniana e l'iperbole cubica; tentativo che riescì vano nel secondo caso, come il PIOLA medesimo dice in una delle sue Memorie stampate in seguito.

Se non che volendo applicare le soluzioni ottenute dal VENTUROLI e dal TADINI pel moto del velo d'acqua fra due rette al moto dell'acqua nei canali ed alle misure delle acque correnti, come fece il TADINI medesimo, era d'uopo partire dall'ipotesi che la superficie del pelo dell'acqua fosse piana, ipotesi la quale contiene dell'arbitrario, volendo i dati del problema che null'altro si verifichi a questa superficie che la condizione di una pressione costante in tutti i punti. Questo appunto vide il professore MOSSOTTI, ed in una sua Memoria stampata fra quelle della Società Italiana **) prese a trattare il problema del moto permanente dell'acqua in un canale di forma parallelepipeda rettangolare, aperto superiormente, colle sponde verticali e col fondo inclinato di poco all'orizzonte; colla sola condizione che la superficie del pelo si disponga in modo che la pressione sia in ogni punto costante ed eguale a quella dell'atmosfera. Le formole da cui parte il MOSSOTTI sono quelle che trovansi nel tomo II, sezione XI, della *Meccanica Analitica*; il problema è sciolto dapprima nell'ipotesi del *binomio differenziale esatto*, e quindi in un'aggiunta, anche prescindendo da tale restrizione. Trovasi che la linea del pelo dell'acqua, tanto nell'un caso che nell'altro, è una curva del terzo ordine, che appartiene alla decimaterza specie, secondo la classificazione dell'EULERO, la quale ha quattro rami infiniti, di cui due aventi per assintoto la linea stessa che rappresenta il fondo, e due una retta orizzontale; risultato che venne più tardi

*) [Milano, dall'imp. regia stamperia, 1825].

**) *Sul moto dell'acqua nei canali* [Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze, t. XIX (1821), pp. 616-658].

impugnato dal professore BELLAVITIS *). Dimostrasi che la differenza di livello del pelo in due diverse sezioni è uguale alla differenza delle altezze dovute alla velocità superficiale nelle stesse sezioni, teorema ridimostrato in seguito dal PIOLA **); e che la differenza delle altezze dovute alle velocità delle molecole poste alla superficie o sul fondo è costante in tutta la lunghezza del canale.

A questa pregevole Memoria del professore MOSSOTTI tenne dietro alcuni anni dopo quella dell'ingegnere BRUSCHETTI ***). Rammentate le formole fondamentali date da LAGRANGE, e l'applicazione fattane dal MOSSOTTI nel lavoro di cui dicemmo poco sopra, prende il BRUSCHETTI a considerare la quistione opposta alla trattata dal professore MOSSOTTI; cioè a ricercare gli accidenti del moto di una massa d'acqua corrente in un canale di fondo sconosciuto e col pelo disposto in una linea data. Supposta la linea del pelo coincidere con una retta, giunge a trovare dover essere la linea del fondo una linea del terzo ordine simmetrica relativamente al pelo dell'acqua, della quale curva assegna una costruzione geometrica.

Il problema della figura del pelo dell'acqua negli alvei di uniforme larghezza venne poco dopo il professore MOSSOTTI risolto anche dal VENTUROLI †), tanto nell'ipotesi del moto lineare, quanto in quella del moto a due coordinate. Anzi quest'ultimo ridusse quella ricerca più utile alla pratica, tenendo conto delle resistenze uniformi che presentansi al fluido in movimento calcolate secondo la formola di EYTELWEIN; ed assegnò una curva d'indole logaritmica quale linea del pelo dell'acqua.

Il secondo esempio di ricerche intorno alle leggi del movimento di una massa fluida, tenute a calcolo le tre dimensioni, trovasi in una Memoria del signor GIULIO stampata nel 1839 ††), la quale ha per iscopo lo studio delle circostanze che accompagnano l'efflusso dell'acqua da un vaso di rotazione generato da una iperbole cubica. Analogamente a quanto fece il VENTUROLI, col mezzo della nota equazione trinomiale alle derivate del secondo ordine, la quale assume insieme a due altre rappresentanti la permanenza delle molecole fluide alla superficie del vaso, determina la forma della funzione da cui si hanno i valori per le componenti della velocità e per la pressione. Notiamo che questi valori non sono già tenuti come particolari per le molecole che lambi-

---

*) *Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium* [Novi Commentarii Acad. Scient. Instituti Bononiensis, vol. VIII (1846), pp. 445-480].

**) *Nuove ricerche per una risoluzione più rigorosa di vari problemi sul moto dell'acqua* [Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze ecc., t. I (1840-42), pp. 217-311].

***) *Sulla nuova teoria del moto dell'acqua*. Milano, Tip. Bernardoni, 1829.

†) *Ricerche sulla figura del pelo d'acqua negli alvei d'uniforme larghezza fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontifici d'acque e strade l'anno* 1823.

††) *Di un caso particolare della dottrina dell'efflusso dell'acqua dai vasi.* Torino, 1839.

scono le pareti, ma si ritengono dal professore GIULIO estendibili a tutte le altre molecole; con facili calcoli siamo così condotti a rintracciare tutti gli accidenti di quell'efflusso.

Il professore TURAZZA nella sua Memoria che fa parte del tomo decimo degli Annali del Regno Lombardo-Veneto *), dopo alcune considerazioni intorno l'identità dei risultati ottenuti dai signori VENTUROLI e TADINI nelle loro ricerche sul moto dell'acqua in un piano, prende ad esaminare la risoluzione del problema per la quale si determina l'efflusso dell'acqua dai vasi conici data dal VENTUROLI. Osserva che il risultato cui giunge il VENTUROLI non è conseguenza, ma assunto, nella soluzione del problema, mentre i valori delle componenti della velocità, da cui parte lo stesso autore, potranno al più verificarsi alle pareti, non in un punto qualunque della massa liquida; osservazione la quale, come principio, può estendersi, dietro il già detto, anche alla soluzione data dal professore GIULIO. Il TURAZZA tenta in seguito risolvere di nuovo il problema nella sua generalità; giovandosi delle coordinate sferiche, riduce la equazione trinomia alle derivate del secondo ordine alla forma datale da LAPLACE, dietro la cui scorta ottiene l'integrale mediante due serie infinite di funzioni. Le formole generali applicate al caso dell'efflusso del vaso conico ridanno però i risultati del VENTUROLI. Due altri argomenti sono scopo alle riflessioni del professore TURAZZA in questa prima Memoria; cioè l'applicazione fatta dal professore MAGGI nelle sue ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento al moto dell'acqua nei vasi conici, ed al moto di un velo fluido rinchiuso da due rette concorrenti o da un ramo di iperbole apolloniana e dal suo assintoto; e la trattazione del problema del moto dell'acqua in un piano contenuto fra rette concorrenti, non supponendo *differenziale esatto* il binomio delle velocità. Il MAGGI **) nel trattare le questioni accennate, avendo immaginato che, per alcun dato fisico o sol anco razionale, fosse nota la famiglia delle linee descritte dalle molecole in corso, ed ammessa inoltre la integrabilità del *trinomio differenziale*, pervenne alle formole già date dal VENTUROLI e dal PIOLA. Osserva il TURAZZA essere troppe le ipotesi assunte dal MAGGI, bastando la prima a dar risolte quelle questioni.

Le difficoltà analitiche, che eransi presentate a ciascuno dei geometri, i quali si erano occupati di problemi idraulici, difficoltà per la maggior parte dipendenti dalla determinazione delle funzioni arbitrarie, indusse il PIOLA nelle sue *Nuove ricerche* ecc. ad abbandonare i metodi adottati prima di lui, e ad approfittare dei nuovi mezzi introdotti dal celebre FOURIER nelle ricerche fisico-matematiche; restringendosi però ad usarne in quella sola parte che riguarda il rendere soddisfatte le condizioni alle quali va soggetto

*) *Intorno alle soluzioni di alcuni problemi d'Idraulica.* [Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto, t. X (1840), pp. 237-252].

**) *Ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento; aggiuntevi alcune considerazioni meccaniche ed idrauliche.* [Poligrafo, t. VI (1835), pp. 3-41; t. VII (1835), pp. 49-93].

il fluido in movimento. Nel capo I della citata Memoria, destinata alle soluzione del problema del moto dell'acqua a due coordinate, assume l'autore, ad imitazione di LAGRANGE, quali valori delle componenti della velocità le derivate parziali di una medesima funzione delle coordinate del punto della molecola fluida che si considera, funzione di forma incognita. In questo modo vien soddisfatto alla equazione della continuità, e le condizioni che si deducono dalle equazioni delle pareti, che il fluido deve lambire, forniscono per quella funzione incognita una proprietà, la quale, secondo il PIOLA, varrà a determinarla in ogni caso particolare. L'applicazione del nuovo metodo al caso delle pareti rettilinee riconduce alle formole del VENTUROLI, e l'applicazione al caso di una parete rettilinea orizzontale e dell'altra curvilinea, porzione di curva a determinarsi, conduce a trovare dover essere la seconda parete una iperbole apolloniana. Il Capo II contiene analoghe ricerche per varj casi del moto dell'acqua riferito a tre coordinate; qui pure, poste le componenti della velocità rispettivamente eguali a funzioni di due funzioni di forma incognita, arrivasi a trovare dovere quelle funzioni incognite soddisfare a tale proprietà, per mezzo della quale si potranno determinare in ogni particolare questione. È giovandosi di essa che giunge alle formole già trovate dal VENTUROLI pel moto dell'acqua nei vasi conici, e prende a considerare il problema più generale in cui la superficie del vaso è quella di un solido qualunque di rivoluzione, applicandovi ad esempio il caso nel quale la curva generatrice è una iperbole cubica, riconfermando così i risultamenti del professore GIULIO. È poi nel Capo III che l'autore discute il moto dell'acqua nei canali aperti, supposto il movimento essere stabilito ed a due coordinate. Dietro tali ipotesi gli si rende possibile applicare al problema attuale i risultati cui era giunto nel Capo I ed ottenere, dopo lunghi calcoli, i valori della pressione e della velocità in un punto qualunque della massa fluida, non che la equazione della linea descritta da ogni molecola, equazione la quale, come fece osservare il signor BELLAVITIS, rappresenta una cicloide. Fa uso da ultimo delle formole ottenute per dimostrare nuovameute il teorema del MOSSOTTI intorno alle differenze di livello del pelo in due diverse sezioni più sopra enunciato, e per la ricerca della scala delle velocità e di quella delle pressioni per una sezione qualunque. Il professore BORDONI *) partendo dall'ipotesi dell'eguaglianza di pressione per le molecole costituenti una medesima vena fluida, ipotesi desunta dalla incompressibilità del liquido e dal supporre il moto stabilito, ossia la corrente composta dall'aggregato di infinite sottilissime vene di figure invariabili, riconfermò, mediante una analisi sua propria, i risultamenti a cui era giunto il PIOLA in quel Capo III.

A questo lavoro del PIOLA tennero dietro altri tre, due Note inserite nel *Gior-*

*) Vedi la nota posta in fine dell'opuscolo: *Elementari dimostrazioni delle formole per le portate delle bocche ordinarie.* Pavia, 1844.

nale dell'Istituto *) ed una Memoria **) stampata nel secondo volume degli *Atti*. La prima, in ordine cronologico, verte sulla legge della permanenza delle molecole dei fluidi in moto alle superficie libere; assunta la equazione generale pel moto dei liquidi quale vien data dalla Meccanica Analitica, e precisamente quella parte di essa equazione, che consta di integrali duplicati e quindi rappresenta proprietà che devonsi verificare ai limiti della massa fluida, giunge a stabilire che nel caso del moto permanente il perseverare le molecole alla superficie libera non è una ipotesi ma un fatto.

È a questa medesima conclusione che giunsero il signor SVANBERG ***) in un caso particolare, ed il signor EDLUND †) in generale, dimostrando la permanenza delle molecole del liquido alle pareti dei vasi che lo contengono essere conseguenza necessaria della continuità della massa liquida. Nella sua Memoria sul moto dei fluidi il signor SVANBERG suppone che esso abbia luogo simmetricamente rispetto ad una retta qualunque. Ammette possa accadere movimento di rotazione della massa fluida attorno quell'asse, talchè si presentano quali incognite ad assumersi, oltre la pressione e la densità per una molecola qualunque, le velocità della molecola stessa parallelamente all'asse, perpendicolarmente all'asse e di rotazione intorno all'asse. Nelle formole generiche pel moto dei fluidi per mezzo delle coordinate polari si sostituiscono facilmente alle tre ordinarie componenti della velocità le tre velocità sumentovate; e le nuove formole che si ottengono, oltre al provare come, nelle condizioni ammesse dall'autore, la permanenza delle molecole del fluido alle pareti del vaso che lo contengono sia conseguenza della continuità della massa liquida, conducono all'interessante teorema, che la velocità di rotazione di una molecola qualunque nei differenti punti della sua trajettoria è sempre in ragione inversa dei quadrati delle distanze che i punti medesimi hanno dall'asse di rotazione.

Nel 1843 comparve negli *Atti dell'Istituto Veneto* la seconda delle *Memorie Idrauliche* del professore TURAZZA ††). In essa l'autore proponesi la ricerca delle circostanze dell'efflusso dai vasi di rivoluzione ad asse verticale; il metodo da lui adottato

---

*) *Sulla legge di permanenza delle molecole de' fluidi in moto alle superficie libere* [Giornale del'I. R. Istituto Lombardo di Scienze ecc., s. 1ª, t. VI (1843), pp. 324-339]; *Di una estensione della teoria del moto dell'acqua nei vasi* [Ibid., s. 1ª, t. VII (1843), pp. 338-353].

**) *Sul moto permanente dell'acqua* [Memorie dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze ecc., t. II (1845), pp. 53-142].

***) *Sur le mouvement des fluides* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXIV (1842), pp. 153-163].

†) *Conséquences nécessaires de l'équation de la continuité des fluides* [Nova Acta R. Societatis Scientiarum Upsaliensis, t. XIII (1847), pp. 87-104].

††) *Dell'efflusso dei liquidi dai vasi di rivoluzione* [Atti dell'I. R. Istituto Veneto, t. II (1843), pp. 295-297; Memorie dell'I. R. Istituto Veneto, t. II (1845), pp. 93-130].

è in generale quello usato dal LAGRANGE, dall'EULERO, dal VENTUROLI e da tutti gli altri, eccettone il PIOLA; ottenute cioè le funzioni, le più generali possibili che soddisfano alle equazioni generali del moto dei fluidi, le determina in ogni caso particolare mediante le condizioni spettanti ad esso. Però, partendo il signor TURAZZA dalle ipotesi, che all'origine non sia stato impresso al liquido alcun movimento di rotazione, che sia *differenziale esatto* il noto trinomio delle velocità, e che le molecole liquide le quali trovansi sull'asse all'origine vi si mantengano per tutta la durata del moto, giunge ad una equazione alle derivate parziali del secondo ordine, che è una di quelle che riscontransi nella teorica del suono, della quale assegna l'integrale sotto due differenti forme, cioè col mezzo di un integrale definito doppio, e col mezzo di un integrale definito semplice. Quest'ultimo, già proposto dal BRISSON *) quale integrale completo della medesima equazione, venne dimostrato incompleto dal POISSON **), che ne assegnò il completo formato colla somma di due integrali definiti. A tre esempj applica il professore TURAZZA le sue formole; all'efflusso dell'acqua dal vaso conico, dal vaso generato dalla rotazione dell'iperbole cubica attorno l'assintoto, e dal vaso generato dalla rotazione di una curva di equazione determinata e dal suo assintoto attorno all'asse verticale, avvenendo così il movimento per quest'ultimo caso fra due pareti, l'una delle quali, l'interna, è la superficie esteriore del cono generato dall'assintoto, e l'altra, l'esterna, è la superficie generata dalla curva. I primi due casi ridanno le soluzioni dei professori VENTUROLI e GIULIO, il terzo caso serve a gettar luce sul problema del moto dell'acqua sulla superficie esterna di un cono retto verticale; la conclusione, cui giunge l'autore: « *che le molecole esistenti sulla superficie conica si mantengono sempre aderenti alla* « *stessa descrivendo linee concorrenti al vertice, mentre tutte le altre descrivono linee curve* « *di una stessa famiglia dipendente dall'angolo al vertice del cono, le quali curve tutte* « *sono comprese in piani verticali passanti per l'asse, e concorrono ad assintoto colla cor-* « *rispondente generatrice del cono* », è in perfetta contraddizione colle conseguenze cui era giunto il signor PIOLA trattando il medesimo problema. L'autore termina la Memoria mostrando in qual modo debbasi progredire nella ricerca delle leggi del moto di un liquido entro un vaso di forma determinata, ogni qual volta pongasi l'ipotesi che le trajettorie sieno espresse dalla stessa equazione che le pareti, variando solo nel passare dall'una all'altra il valore di un parametro; ed assegna tale forma di vaso per la quale il moto non è possibile in quella ipotesi.

---

*) *Sur l'intégration des équations différentielles partielles* [Journal de l'École Polytechnique, Cahier XIV (1818), pp. 191-261].

**) *Sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles* [Ibid., Cahier XIX (1823), pp. 215-248]. La osservazione cui spettano queste due citazioni trovasi anche nella citata memoria del professore TARDY.

Al lavoro del professore TURAZZA tenne subito dietro la seconda delle suddette Note del PIOLA; anzi prendendo argomento dal lavoro medesimo, assumendo le espressioni già da lui date nel Capo II della *Memoria prima* quali valori delle componenti della velocità della molecola generica, prendendo per equazione della superficie di rotazione ad asse verticale una equazione più generale di quella da lui adottata in quel Capo II, ed ammettendo la ipotesi del *trinomio differenziale esatto* (ipotesi ammessa dal TURAZZA), arriva ad una equazione di condizione, a verificare la quale si presentano due modi. Sì l'uno che l'altro di questi modi sono origine di un grandissimo numero di casi, nei quali il moto dell'acqua nell'interno dei vasi può analizzarsi completamente; adottando poi il primo modo giungesi alle soluzioni dei signori GIULIO e TURAZZA; adottando l'altro si rinvengono le formole del VENTUROLI. In una appendice a questa Nota dimostrasi affatto analogamente come nel moto di un velo d'acqua in un piano verticale, rinchiuso fra una parete rettilinea orizzontale e fra un'altra parete fissa qualunque, giungesi pure ad una equazione di condizione; e dai due differenti modi di verificarla ritrae due famiglie di soluzioni possibili, a capo di una delle quali sta il caso in cui la seconda parete sia l'iperbole apolloniana, ed a capo dell'altra il caso della retta. In questa appendice dimostrasi anche potersi assumere per seconda parete una linea ad equazione trascendente.

Il professore BELLAVITIS *), nella prima parte di una Memoria letta all'*Istituto Veneto* nel 1844, tratta nuovamente i tre casi del moto dell'acqua entro vasi di rivoluzione già considerati dal VENTUROLI, dal GIULIO, dal TURAZZA e fa osservare come le soluzioni date da essi non corrispondano alle circostanze fisiche che naturalmente accompagnano l'efflusso dei liquidi da un vaso, mentre nella soluzione relativa ad una quarta specie di vaso, che è quello generato dalla rotazione di una iperbole equilatera intorno ad un suo assintoto, riescono le condizioni implicitamente ammesse conformi alle ordinarie circostanze. La soluzione data dall'autore per questo quarto caso non è soggetta alla condizione del *trinomio differenziale esatto*, e viene soddisfatto soltanto alla legge di continuità ed alla condizione che la pressione per un punto qualunque sia eguale in tutti i sensi. La seconda parte di essa Memoria contiene considerazioni sul moto dell'acqua in un piano analoghe alle succitate pel moto dell'acqua nei vasi rotondi; considerazioni che in buona parte vennero ripetute in una seconda Memoria di cui diremo in appresso.

Alcune osservazioni intorno ai lavori del TADINI, del SAN MARTINO e del PIOLA formano lo scopo di una breve Memoria del signor PADULA. Già abbiamo detto delle obbiezioni da lui promosse al TADINI ed al SAN MARTINO; le sue riflessioni intorno

*) *Considerazioni sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale* [Memorie dell'I. R. Istituto Veneto, t. II (1845), pp. 339-360].

alla prima Memoria del signor PIOLA vertono principalmente sul dubbio che la forma esibita dal teorema del PIOLA per la funzione, dalla quale si hanno le espressioni delle componenti della velocità, presenti in ogni caso la voluta generalità.

Oggetto principale alla seconda Memoria del signor PIOLA è l'analisi del moto permanente dell'acqua in canali superiormente aperti, considerate tutte e tre le dimensioni. Però siccome l'analisi adottata nel Capo III della precedente Memoria, trattandosi di moto a due coordinate, difficilmente piegavasi allo studio di queste nuove questioni, trova utile di far uso d'una analisi particolare, a ben comprendere lo spirito della quale tratta ancora nel Capo I del moto permanente dell'acqua in un piano. Il metodo immaginato dal PIOLA, col mezzo di cui si abbreviano di gran lunga i calcoli occorribili in quelle ricerche, consiste nell'avere distinte le due differenti specie di costanti, le quali entrano nelle formole che incontransi nello studio del moto dei fluidi. Alcune di esse sono tali tanto in riguardo al tempo, quanto in riguardo alla posizione della molecola fluida che si considera, quali sarebbero la gravità, la pressione atmosferica ecc., ed alcune lo sono solamente in riguardo al tempo, potendo mutare nel passaggio da un luogo ad un altro, quale sarebbe il parametro che entra nell'equazione generale delle trajettorie descritte dalle molecole fluide, il quale non cambia valore per tutta una trajettoria, ma lo muta passando da una trajettoria all'altra, ed in ciascuna è costante rispetto al tempo. Da alcune proprietà di questa seconda specie di costanti e dall'uso diligente delle medesime ritrae il PIOLA mezzi bastevoli alla trattazione di quei nuovi problemi. Nel Capo II tratta estesamente del moto permanente dell'acqua considerate tutte e tre le dimensioni; e ritrovatene le formole generali, le applica a correnti in tubi o canali chiusi ed alle correnti superiormente libere, supposto il canale fiancheggiato da sponde piane. Frutto di lunghi e laboriosi calcoli, giunge ad ottenere le equazioni finite fra le tre velocità, la pressione, le coordinate della molecola generica ed altre quantità, le quali rimangono invariate per tutta la massa fluida in moto. Il Capo III è dedicato a dedurre alcune circostanze del moto permanente dell'acqua nei canali aperti e nei fiumi quali conseguenze delle teoriche contenute nei primi due Capi. Il caso discussovi è quello di un canale a fondo orizzontale ed a sponde piane egualmente inclinate all'orizzonte; le formole del Capo II, applicabili al moto dell'acqua fra due sponde piane comunque inclinate all'orizzonte, ma però fra loro parallele, si pongono a profitto anche per questo caso, supponendo che l'acqua corra in piani paralleli alle sponde di qua e di là del piano verticale che puossi immaginare condotto per la retta che divide in due parti eguali il fondo del canale. Arriva per tal modo a dimostrare: 1° che il moto dell'acqua in un canale a sponde verticali e parallele può ridursi al moto in un piano, essendo nulla la velocità secondo la larghezza del canale; proposizione già ammessa senza previa dimostrazione dal VENTUROLI, dal PLANA, dal MOSSOTTI; 2° che la formazione del filone è dipendente dall'inclinazione delle sponde del canale, propo-

sizione impugnata dal TADINI; 3° sussistere il *colmeggiamento,* cioè l'acqua corrente nel sito del filone essere più alta di quella che corre in vicinanza delle sponde; 4° che la differenza di livello del pelo per due punti, nei quali due sezioni sono tagliate da un piano parallelo ad una sponda, eguaglia la differenza delle altezze dovute alle due velocità assolute superficiali per gli stessi punti, teorema più generale dell'analogo trovato dal professore MOSSOTTI e ridimostrato dal PIOLA nel Capo III della precedente Memoria. La determinazione della scala delle velocità in una corrente, punto intorno al quale le sentenze degli scrittori nella scienza delle acque sono in maggior discordia, venne anche studiata dal PIOLA; le conseguenze cui giunse proverebbero non potersi dare un massimo nella scala delle velocità, ossia non sussistere filone in altezza, come credevano VENTUROLI e TADINI. Alcuni cenni sul problema delle portate, e la ricerca di una espressione per la misura di esse terminano la Memoria.

Il secondo lavoro pubblicato dal professore BELLAVITIS *) intorno ad argomento idraulico è diviso in cinque capitoli. Il primo capitolo è dedicato alla ricerca delle formole generali pel moto dell'acqua in un piano, le quali formole vengono nel seguente applicate al caso delle pareti rettilinee. La soluzione già data dal VENTUROLI è minutamente analizzata dall'autore tanto a *posteriori* quanto a *priori*; a *posteriori,* allorquando vuol provare che l'unico moto permanente, il quale possa conciliarsi colle formole del VENTUROLI, sarebbe quello in cui ciascuna molecola si movesse come fosse sola; a *priori,* quando avendo ottenuto per i valori delle velocità due serie procedenti secondo le potenze dell'ascissa e contenenti funzioni arbitrarie dell'ordinata e del tempo, le quali soddisfano tanto al *binomio differenziale* delle forze come a quello delle velocità, esibisce una equazione generale delle trajettorie, la quale per valori particolari di un parametro può rappresentare le pareti rettilinee, mentre, al dir dell'autore, le altre trajettorie saranno curvilinee. Tratta da ultimo del moto di un velo d'acqua rinchiuso fra due rette perpendicolari tra loro, e le formole a cui giunge contengono quale caso particolare quelle date dal VENTUROLI, considerando le pareti rettilinee comunque inclinate, mentre in via ordinaria dovrebbe aver luogo il contrario. Il terzo ed il quarto capitolo contengono la ricerca delle formole generali del moto dell'acqua simmetrico attorno ad un asse e la applicazione all'efflusso dal vaso conico: e qui pure commentando la soluzione del VENTUROLI, trova non rispondere essa alle fisiche circostanze di quel movimento. Nel capitolo quinto, parlando del moto dell'acqua negli alvei, prende l'autore ad analizzare gli studj del MOSSOTTI e del PIOLA; le osservazioni di lui a questo proposito vennero accennate più addietro.

Veniamo ora alla Memoria del professore TARDY già più volte citata, come

*) *Observationes de quibusdam solutionibus analyticis problematum ad liquidorum motum pertinentium* [Bologna, Novi Commentarii, t. VIII (1846), pp. 445-480].

quella che contiene osservazioni critiche intorno a varj lavori d'idraulica teoretica. Nella prima parte di essa, dopo aver posto in luce le più importanti ricerche idrauliche esistenti anteriormente a quelle del VENTUROLI, considera il moto dell'acqua a due coordinate, supposte essere le pareti l'iperbole equilatera ed una retta; la parabola e l'asse delle ascisse, e ciò per mostrare essere possibile la trattazione di questi problemi anche nel caso in cui dalla equazione di una parete non si possa passare a quella dell'altra mutando il valore ad una costante, il che verrebbe escluso dall'analisi del PIOLA anche perchè quelle costanti si riscontrano nei valori delle velocità componenti. Questi esempi ponno inoltre servire di confutazione all'opinione manifestata dal professore AMICI nel secondo volume del suo *Corso di Meccanica* *), laddove dice che l'introdurre la condizione della permanenza delle molecole alle pareti *fa sì che tutte le altre molecole della massa liquida restano obbligate a percorrere delle linee della stessa specie di quelle.* Occupasi in seguito il signor TARDY del moto dell'acqua entro vasi di rivoluzione, ammessa la permanenza delle molecole del fluido alla superficie del vaso che lo contiene, e supposto che le molecole non debbano mai escire dai piani meridiani. La equazione alle derivate parziali rappresentante quel movimento viene dall'autore integrata col mezzo delle derivate ad indice fratto, e le formole che se ne deducono vengono applicate all'efflusso dai vasi conici. Mostra quindi come i casi di efflusso dai vasi di rivoluzione, trattati dai professori TURAZZA e GIULIO, lo possano essere assai più brevemente rendendosi in allora possibile il far uso, per l'integrazione diretta dell'equazione generale alle derivate parziali del secondo ordine, del metodo immaginato dal professore AMICI **), il quale, come osserva il TARDY, non è però estendibile a tutti gli altri casi di efflusso da' vasi di rivoluzione, potendosi a questi applicare il metodo insegnato da ABEL ***) per determinare la funzione arbitraria. Da ultimo viene a discutere l'ipotesi del moto per filetti; i risultati cui giunse vennero già riferiti.

I più recenti lavori idraulici appartengono all'ingegnere BRIGHENTI. Già fino dal 1828 aveva il BRIGHENTI in una Nota sul moto dell'acqua a due coordinate esposti alcuni dubbi intorno le soluzioni del VENTUROLI e del TADINI, principalmente avuto riguardo al modo con cui si determinano le forme delle funzioni arbitrarie. Le obbiezioni in allora mosse dall'ingegnere BRIGHENTI e discusse di poi dal BRUSCHETTI e dal TURAZZA si riassumono nel dire: che nel moto del velo d'acqua rinchiuso da rette con-

*) AMICI, *Corso elementare di Meccanica ed Idraulica.* Firenze, 1842.

**) Opera citata, vol. II.

***) ABEL, *Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu' une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes,* Œuvres complètes; Éd. HOLMBOE, (Christiania, 1839), t. II, pp. 213-221.

correnti la trajettoria rettilinea era già prescritta dalle assunte ipotesi; che la soluzione dell'efflusso dai vasi conici era un caso particolare di quella del moto a due coordinate; e che, posta la cognizione dell'equazione delle trajettorie, tutte le conseguenze cui giunsero quegli autori potevano ricavarsi dalla teorica del moto lineare, convertendo in circolari o sferici gli strati che discendono normalmente alla direttrice del moto. A questi tre punti si può dire riducansi anche le considerazioni che il signor BRIGHENTI pubblicava negli anni 1847, 1848 in una nota all'elogio del VENTUROLI ed in una Memoria *) letta all'*Accademia di Bologna*, sebbene in questa seconda vengano anche brevemente analizzate le Memorie del PIOLA.

Vedemmo quali furono le obbiezioni ed i dubbi mossi ai risultamenti del VENTUROLI e del PIOLA. Nella Memoria, che fa seguito al presente riassunto storico (la quale viene pubblicata quale ritrovossi senza variazione alcuna), è scopo principale al PIOLA il difendere la teorica del VENTUROLI e la propria, ed il conciliare, fin dove è possibile, le sue opinioni con quelle de' suoi oppositori. Avrà egli raggiunto l'intento?

[C.].

---

*) BRIGHENTI, *Considerazioni sulle generali equazioni dell'idrodinamica e sulle applicazioni che se ne sono fatte finora* [Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, t. I (1850), pp. 547-562].

CIV.

SULLA TEORIA DEI COVARIANTI.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana,
Nuova serie, t. VIII (1856), pp. 329-333.

La ricerca dei covarianti e degli invarianti di una funzione omogenea a due indeterminate, ed i criterj per distinguere quali fra essi sieno irreducibili sono i due problemi principali di quella parte della morfologia che può denominarsi *teorica dei covarianti*. Da quanto rilevasi da un brevissimo estratto di una comunicazione fatta dal signor CAYLEY alla Società Reale di Londra nel 24 maggio del 1855 *), pare che questo Autore sia giunto a risolvere il secondo di essi problemi, appoggiandosi ad alcuni nuovi risultati ottenuti nelle sue ricerche sulla partizione dei numeri. Anche il primo di quei problemi può dirsi avere una soluzione completa nel calcolo degli iperdeterminanti; ma le difficoltà che si presentano nell'uso di questo calcolo hanno indotto i geometri a cercare altre soluzioni di esso; e da qui ebbero origine gli egregi lavori del SYLVESTER e del CAYLEY sull'argomento e la recente Memoria dell'HERMITE **), nella quale, oltre a varie proposizioni generali sulla teorica dei covarianti, si rinvengono, trovati in un modo particolare, i quattro invarianti irreducibili di una funzione omogenea del quinto grado.

*) CAYLEY, *A second Memoir upon Quantics* [Proceedings of the R. Society of London, t. VII, pp. 380-381]. [La memoria di CAYLEY, della quale qui si cita il riassunto, è stata più tardi pubblicata per esteso nelle Philosophical Transactions of the R. Society of London, t. 146 (1856), p. I, pp. 101-126].

**) HERMITE, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (Premier et second Mémoire) [The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. IX (1854), pp. 172-217; Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), pp. 1-38].

È noto come un covariante di una forma qualunque a due indeterminate possa definirsi: *una funzione dei coefficienti della forma stessa e delle due indeterminate, la quale sia omogenea di un certo grado, sia omogenea in indice di un ordine determinato, e soddisfi ad una equazione alle derivate parziali.* Ora, allorquando una funzione soddisfi a queste condizioni, cioè sia un covariante, i coefficienti di esso, i quali saranno funzioni dei coefficienti della forma data, soddisferanno pure a certe condizioni, la conoscenza delle quali può tornar utile nella ricerca dei covarianti medesimi.

Sia

$$(a_0, a_1, \dots a_n)(x, y)^n$$

la forma data, e

$$\varphi = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m)(x, y)^m$$

un covariante della medesima. Se con P, Q si indicano i due simboli di operazione

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n},$$

$$n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}},$$

si avranno, come è conosciuto, le due equazioni seguenti:

$$(1) \qquad P(\varphi) - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad Q(\varphi) - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Ora si osservi che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_r} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_0} \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_r} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial a_r},$$

quindi

$$P(\varphi) = \sum_0^m {}_r P(\alpha_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_r}, \qquad Q(\varphi) = \sum_0^m {}_r Q(\alpha_r) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_r},$$

e siccome

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_r} = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} x^{m-r} y^r,$$

si avranno le

$$P(\varphi) - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_0^m {}_r \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} x^{m-r} y^r [P(\alpha_r) - r \alpha_{r-1}],$$

$$Q(\varphi) - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_0^m {}_r \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r} x^{m-r} y^r [Q(\alpha_r) - (m-r) \alpha_{r+1}].$$

Da queste equazioni, avendo riguardo alle (1), si deducono le

$$P(\alpha_r) = r \alpha_{r-1}, \qquad Q(\alpha_r) = (m-r) \alpha_{r+1},$$

alle quali debbono soddisfare i coefficienti del covariante φ. La seconda di queste conduce tosto all'importante risultato che per trovare il covariante φ è sufficiente il conoscere il valore di α_0; giacchè, ponendo in essa $r = 0, 1, 2 \dots$, si hanno le

$$(2) \qquad \alpha_1 = \frac{1}{m} Q(\alpha_0), \qquad \alpha_2 = \frac{1}{m-1} Q(\alpha_1), \quad \dots \quad \alpha_m = Q(\alpha_{m-1}),$$

mediante le quali si vengono a determinare l'uno di seguito all'altro i coefficienti di φ quando si conosca α_0. Osserviamo inoltre che dalle due equazioni superiori deducesi la

$$n a_0 \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_0} + (n-2) a_1 \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_1} + \dots + (n-2n) a_n \frac{\partial \alpha_r}{\partial a_n} = (m-2r)\alpha_r;$$

quindi, ponendo nella prima di quelle ed in questa $r = 0$, si ottengono le seguenti:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_2} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_n} &= 0, \\ n a_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_0} + (n-2) a_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} + \dots + (n-2n) a_n \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_n} &= m \alpha_0; \end{aligned} \right.$$

equazioni caratteristiche pel coefficiente α_0. Se supponesi che questo coefficiente sia omogeneo del grado p rispetto ai coefficienti $a_0, a_1, \dots$, si avrà:

$$a_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_n} = p \alpha_0;$$

quindi, moltiplicando questa equazione per n e sottraendo la seconda delle (3), si ottiene:

$$a_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_2} + \dots + n a_n \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_n} = \frac{np - m}{2} \alpha_0.$$

Siamo così condotti al seguente teorema:

Un covariante del grado m^{mo} rispetto alle variabili e di grado p^{mo} rispetto ai coefficienti di una forma dell'n^{mo} grado ha la proprietà che il suo primo coefficiente deve essere omogeneo in indice dell'ordine $\frac{np - m}{2}$ e soddisfare alla prima delle equazioni (3); *e gli altri coefficienti si deducono da esso mediante l'operazione indicata dalle equazioni* (2).

Per esempio: è noto per la legge di reciprocità dell'Hermite che le forme di sesto grado ammettono un covariante quadratico in x, y e del terzo grado rispetto ai coefficienti. In questo caso si avrà $n = 6$, $m = 2$, $p = 3$, quindi α_0 sarà omogeneo

in indice dell'ordine ottavo, e dovrà soddisfare alla

$$a_0 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_2} + \cdots + 6 a_5 \frac{\partial \alpha_0}{\partial a_6} = 0.$$

Queste condizioni sono verificate ponendo

$$\alpha_0 = a_0 a_2 a_6 + 3 a_1 a_2 a_5 - a_1 a_3 a_4 - 3 a_0 a_3 a_5 - a_1^2 a_6 - 3 a_2^2 a_4 + 2 a_2 a_3^2 + 2 a_0 a_4^2,$$

da cui

$$2\alpha_1 = a_0 a_3 a_6 - a_1 a_2 a_6 - a_0 a_4 a_5 - 17 a_2 a_3 a_4 - 8 a_1 a_3 a_5 + 9 a_2^2 a_5 + 9 a_1 a_4^2 + 8 a_3^3,$$

$$\alpha_2 = a_0 a_4 a_6 + 3 a_1 a_4 a_5 - a_2 a_3 a_5 - 3 a_1 a_3 a_6 - a_0 a_5^2 - 3 a_2 a_4^2 + 2 a_3^2 a_4 + 2 a_2^2 a_6,$$

ed il covariante quadratico della forma di sesto grado sarà

$$\alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha_2 y^2.$$

Il valore di α_0, alla ricerca del quale è ridotta quella di un covariante di una forma qualsivoglia, si può ottenere facilmente in un caso assai generale. Infatti si indichi con ψ un invariante del grado $p + i$ della forma di r^{mo} grado

$$(a_0, a_1, \ldots a_r)(x, y)^r;$$

sarà ψ omogeneo in indice dell'ordine $\frac{(p+i)r}{2}$, e soddisferà alla prima delle equazioni (3). Ma a questa equazione soddisferà anche la derivata di ψ, dell'ordine i qualsivoglia, presa rispetto ad a_r; quindi, ponendo

$$\alpha_0 = \frac{\partial^i \psi}{\partial a_r^i},$$

l'indice di α_0 sarà

$$\frac{(p+i)r}{2} - ir = \frac{(p-i)r}{2},$$

il quale, eguagliato al valore di questo indice dato dal teorema superiore, dà origine alla

$$m = (n - r)p + ir.$$

Nel far uso di questa formola devesi osservare che r ed i devono essere rispettivamente non maggiori di n e di p.

Applicazioni. — Suppongasi $n = 4$ ed $r = 2$, sarà $p + i = 2$; quindi

ad $i = 0$ corrisponderà $m = 4$,

ad $i = 2$ » $m = 4$.

Il primo valore di m corrisponde al covariante di quarto grado della forma di quarto grado (il qual covariante è anche l'Hessiano della forma stessa), ed il secondo valore di m corrisponde alla forma data.

Facendo $n = 4$, $r = 3$, si ha $p + i = 4$; per cui

$$\text{ad } i = 0 \text{ corrisponde } m = 4,$$
$$\text{ad } i = 1 \quad \text{»} \quad m = 6,$$
$$\text{ad } i = 2 \quad \text{»} \quad m = 8,$$

il secondo dei quali valori di m corrisponde al covariante di sesto grado già trovato dal CAYLEY; ed il primo ed il terzo dei medesimi valori corrispondono a covarianti che sono combinazioni degli altri.

Se supponiamo $n = 6$, $r = 4$, si ha $p + i = 2, 3$; quindi

$$\text{ad } i = 0 \text{ corrispondono } m = 4, 6,$$
$$\text{ad } i = 1 \quad \text{»} \quad m = 6, 8.$$

Nel primo caso sarà

$$\alpha_0 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2,$$

e di seguito

$$2\alpha_1 = a_0 a_5 - 3 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3, \qquad 2\alpha_3 = a_1 a_6 - 3 a_2 a_5 + 2 a_3 a_4,$$
$$6\alpha_2 = a_0 a_6 - 9 a_2 a_4 + 8 a_3^2, \qquad \alpha_4 = a_2 a_6 - 4 a_3 a_5 + 3 a_4^2;$$

e la funzione

$$\alpha_0 x^4 + 4\alpha_1 x^3 y + 6\alpha_2 x^2 y^2 + 4\alpha_3 x y^3 + \alpha_4 y^4$$

sarà il covariante di quarto grado rispetto alle variabili e di secondo grado rispetto ai coefficienti della forma di sesto grado. Quindi le espressioni

$$\alpha_0 \alpha_4 - 4\alpha_1 \alpha_3 + 3\alpha_2^2, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$$

saranno gli invarianti di quarto grado e di sesto grado della forma medesima.

27 marzo 1856.

[Ca.], [Pa.].

CV.

SOPRA UN' ESTENSIONE DEL TEOREMA DI ABEL.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana,
Nuova serie, t. VIII (1856), pp. 333-335.

In una notizia bibliografica intorno al terzo volume della *Théorie des fonctions elliptiques* di LEGENDRE, dovuta a JACOBI e pubblicata nell'ottavo volume del Giornale di CRELLE *), viene fatto cenno della possibilità di estendere il teorema di ABEL agli integrali doppj. Di questa ricerca fa pure menzione il ROSENHAIN nella sua Memoria *Sulle funzioni di due variabili ed a quattro periodi,* ecc. **), premiata nel 1846 dall'Accademia delle Scienze di Parigi, ed in una lettera da esso diretta a JACOBI ***).

In questa Nota presentiamo la estensione agli integrali multipli di quella parte del teorema di ABEL, che risguarda i trascendenti Abeliani di prima specie.

Sieno $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ n funzioni intiere, razionali, delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, e suppongasi

$$(1) \qquad \varphi_r = \theta_r^2 p_r - \omega_r^2 q_r ,$$

essendo $\theta_r, \omega_r, p_r, q_r$ funzioni intiere, razionali, delle medesime variabili. I coefficienti delle θ_r, ω_r si ritengano funzioni di n indeterminate $v_1, v_2, \ldots v_n$.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. VIII (1832), pp. 413-417.

**) ROSENHAIN, *Sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, t. XI (1851)].

***) *Auszug mehrerer Schreiben des Dr.* ROSENHAIN *an Herrn Prof.* JACOBI *über die hyperelliptischen Transcendenten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XL (1850), pp. 319-360].

Si indichi con $x_1, x_2, \ldots x_n$ un sistema di radici comuni alle equazioni

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n = 0,$$

e si derivi l'equazione identica

$$\varphi_r(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

rispetto a v_s, essendo s uno qualsivoglia dei numeri 1, 2, ... n; si otterrà:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial v_s} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial v_s} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial v_s} + \cdots + \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v_s} = 0,$$

dalla quale e dalle analoghe deducesi la

$$M\Delta = (-1)^n P, \tag{2}$$

essendosi posto per brevità

$$M = \sum\left(\pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right),$$

$$\Delta = \sum\left(\pm \frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial x_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial v_n}\right),$$

$$P = \sum\left(\pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_n}\right).$$

Ora dall'equazione (1) si hanno le

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial v_s} = 2\left(\theta_r p_r \frac{\partial \theta_r}{\partial v_s} - \omega_r q_r \frac{\partial \omega_r}{\partial v_s}\right),$$

$$\theta_r p_r = \pm\, \omega_r \sqrt{p_r q_r}, \qquad \omega_r q_r = \pm\, \theta_r \sqrt{p_r q_r};$$

quindi

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial v_s} = \pm\, 2\left(\omega_r \frac{\partial \theta_r}{\partial v_s} - \theta_r \frac{\partial \omega_r}{\partial v_s}\right)\sqrt{p_r q_r};$$

e ponendo

$$a_{r,s} = \omega_r \frac{\partial \theta_r}{\partial v_s} - \theta_r \frac{\partial \omega_r}{\partial v_s},$$

$$\psi = p_1 p_2 \ldots p_n q_1 q_2 \ldots q_n,$$

si avrà

$$P = \pm\, 2^n Q\sqrt{\psi}, \qquad Q = \sum(\pm\, a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}).$$

Indicando con $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ una funzione razionale intera delle $x_1, x_2, \ldots x_n$, la

equazione (2), osservando al valore trovato di P, darà

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\sqrt{\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}} \Delta = \pm 2^n \frac{Qf(x_1, x_2, \dots x_n)}{M}.$$

Sieno $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n$ due gruppi di valori particolari delle indeterminate $v_1, v_2, \dots v_n$, ed $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ i valori corrispondenti pel sistema di radici $x_1, x_2, \dots x_n$; dall'ultima equazione si ha

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dx_2 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_n \frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\sqrt{\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}} = \pm 2^n \int_{a_1}^{b_1} dv_1 \int_{a_2}^{b_2} dv_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} dv_n \frac{Qf}{M};$$

e siccome, indicando con $h_1, h_2, \dots h_n$ i gradi rispettivi delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ ed m il grado della funzione Qf, e supponendo

$$m < h_1 + h_2 + \dots + h_n - n,$$

si ha, come è noto per un teorema di Jacobi:

$$\sum \frac{Qf}{M} = 0,$$

rappresentando il simbolo $\sum$ la somma delle espressioni che si ottengono sostituendo per $x_1, x_2, \dots x_n$ tutti i sistemi di radici comuni alle equazioni $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots \varphi_n = 0$; ne risulta che

$$\sum \pm \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dx_2 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_n \frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{\sqrt{\psi(x_1, x_2, \dots x_n)}} = 0.$$

In questa equazione è evidentemente contenuta una proprietà per gli integrali multipli analoga a quella che vien data dal teorema di Abel pei trascendenti Abeliani di prima specie.

27 marzo 1856.

[Ca.], [Pa.].

CVI.

SUGLI INTEGRALI COMUNI A MOLTI PROBLEMI DI DINAMICA.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana,
Nuova serie, tomo VIII (1856), pp. 413-418; t. IX (1857), pp. 110-111.

Considerando il movimento di un punto libero in un piano, se con x, y si indicano le coordinate del medesimo alla fine di un tempo t, e con X, Y le componenti della forza acceleratrice agente su di esso, è noto che le equazioni

$$x'' = X, \qquad y'' = Y$$

servono a determinare le leggi di quel movimento.

Supponiamo ora che, rappresentando α una costante, sia

$$\alpha = \varphi(x, y, x', y', t) \tag{1}$$

un integrale alle derivate del primo ordine di quelle equazioni, è evidente che, derivando questo integrale rispetto al tempo, e sostituendo, nella equazione che si ottiene, le X, Y in luogo delle x'', y'', la equazione risultante sarà identica; cioè, posto per brevità

$$l = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} x' + \frac{\partial \alpha}{\partial y} y', \qquad m = \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, \qquad n = \frac{\partial \alpha}{\partial y'},$$

si avrà identicamente:

$$l + mX + nY = 0,$$

e quindi sussisteranno con essa le sue derivate rispetto ad x' e ad y'. Ora, supponendo che le X, Y sieno funzioni delle sole coordinate x, y, il che verificasi per ogni

problema, il quale ammetta l'integrale delle forze vive, quelle equazioni derivate sono le

$$\frac{\partial l}{\partial x'} + \frac{\partial m}{\partial x'} X + \frac{\partial n}{\partial x'} Y = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial y'} + \frac{\partial m}{\partial y'} X + \frac{\partial n}{\partial y'} Y = 0,$$

per conseguenza dalle equazioni medesime si potrebbero dedurre, in generale, i valori delle forze X, Y corrispondenti al problema di Dinamica, di cui la (1) è un integrale. Ma se queste ultime tre equazioni non sono essenzialmente differenti fra loro, cioè risultino

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial x'} &= \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial x'} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x'}, \\ \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial y'} &= \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial y'} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y'}, \end{aligned} \right.$$

i valori delle X, Y rimarranno indeterminati, e l'integrale (1) potrà competere a molti problemi di Dinamica. Quali sono gli integrali dotati di questa proprietà? La ricerca dei medesimi forma lo scopo di una pregevole Memoria del sig. professore BERTRAND *), nella quale il chiarissimo Autore considera il movimento di un punto in un piano, sopra una superficie qualsivoglia, e nello spazio. Nel caso del movimento in un piano trova due integrali che godono della proprietà suddetta, i quali comprendono tanto l'uno che l'altro l'integrale del principio delle aree, e dichiara essere questi *i soli integrali che competono a molti problemi differenti relativi al movimento di un punto libero in un piano.*

In una Nota letta nella adunanza del 13 marzo 1856 dell'I. R. Istituto Lombardo **) il sig. professore MAINARDI, considerando il movimento di un punto in un piano, giudica assai differentemente i risultati del BERTRAND, dichiarando l'uno degli integrali ottenuti da questo geometra essere un caso particolare di altro integrale più generale, e ponendo in dubbio la sussistenza del secondo. Ho creduto quindi non inopportuno il ritornare sull'argomento e prendere di nuovo ad esame la prima quistione trattata dal BERTRAND.

---

*) BERTRAND, *Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XVII (1852), pp. 121-174].

**) MAINARDI, *Note che risguardano alcuni argomenti della Meccanica razionale ed applicata* [Giornale del R. Istituto Lombardo, etc., nuova serie, t. VIII (1856), pp. 304-328].

È evidente che alle quattro equazioni (2) noi possiamo sostituire le due

$$\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial x'} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x'}, \qquad \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial y'} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial y'},$$

e la identica

$$l + mX + nY = 0.$$

Ora le prime dànno

$$m = n\psi(x, y),$$

e quindi

$$\alpha = F(u, x, y, t),$$

essendo posto $u = y' + x'\psi(x, y)$. Sostituendo questo valore nella terza, e ponendo nella medesima in luogo di y' il binomio $u - x'\psi$, otteniamo la

$$x'^2\frac{\partial F}{\partial u}[\psi'(x) - \psi\psi'(y)] + x'[F'(x) + uF'(u)\psi'(y) - \psi F'(y)]$$
$$+ F'(t) + uF'(y) + F'(u)(Y + X\psi) = 0,$$

la quale si decompone nelle tre

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi'(x) - \psi\psi'(y) = 0, \\ F'(x) + uF'(u)\psi'(y) - \psi F'(y) = 0, \\ F'(u) = [a + uF'(y)]\lambda(x, y), \end{cases}$$

essendo

$$Y + X\psi = -\frac{1}{\lambda(x, y)}, \qquad F'(t) = a.$$

Sono queste le tre equazioni di cui fanno uso tanto il Bertrand quanto il Mainardi per l'ulteriore ricerca intorno alla forma dell'integrale α.

Ma per integrare le equazioni superiori il professore Mainardi pone:

$$\psi(x, y) = \theta, \qquad \lambda(x, y) = \omega,$$

e supponendo dedotte da queste le

$$x = m(\omega, \theta), \qquad y = n(\omega, \theta),$$

trasforma colle regole ordinarie quelle equazioni, che diventano l'una dopo l'altra integrabili. Se consideriamo questa trasformazione dal lato geometrico, è evidente che mediante la medesima si è sostituito alle coordinate x, y rettilinee due serie di linee $\omega =$ cost., $\theta =$ cost. per individuare i punti del piano.

Il professore BERTRAND integra la prima di quelle equazioni e ne deduce

$$y + x\psi = p(\psi) \tag{4}$$

(p simbolo di funzione arbitraria); e considerando questo risultato, osserva che la equazione $\psi =$ cost. è quella di una famiglia di rette, e sostituisce alle coordinate ortogonali x, y la famiglia di rette $\psi =$ cost., e la famiglia delle loro trajettorie ortogonali, che indicherò con $\mu(x, y) =$ cost. Questa è una delle più ingegnose vedute che si trovano nella Memoria del BERTRAND; anche pel vantaggio che ne ritrae per la trattazione delle altre due questioni che ho sopra accennate.

Ho stabilito così un primo fatto, ed è il principale, per cui i risultati del BERTRAND e del MAINARDI non ponno coincidere, senza che per la questione meccanica possa esservi maggiore generalità nel risultato del MAINARDI, ma sola apparenza di generalità dovuta alla differente scelta delle coordinate.

Posto

$$\psi(x, y) = \theta, \qquad \mu(x, y) = \omega,$$

da cui

$$x = m(\omega, \theta), \qquad y = n(\omega, \theta),$$

la (4) può scriversi

$$n = p(\theta) - m\theta,$$

e quindi:

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} = -\theta \frac{\partial m}{\partial \omega}, \qquad \frac{\partial n}{\partial \theta} = p'(\theta) - m - \theta \frac{\partial m}{\partial \theta}.$$

Le linee $\omega =$ cost., $\theta =$ cost. essendo ortogonali, si avrà

$$\frac{\partial m}{\partial \omega}\frac{\partial m}{\partial \theta} + \frac{\partial n}{\partial \omega}\frac{\partial n}{\partial \theta} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial m}{\partial \theta} - \theta \frac{\partial n}{\partial \theta} = 0.$$

Risultano quindi:

$$\frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{p' - m}{1 + \theta^2}, \qquad \frac{\partial m}{\partial \theta} = \frac{\theta(p' - m)}{1 + \theta^2},$$

$$A = \left(\frac{\partial m}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{(p' - m)^2}{1 + \theta^2},$$

$$B = \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \omega}\right)^2 = (1 + \theta^2)\left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^2.$$

Derivando questo valore di B rispetto a θ si ha

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = 2\frac{\partial m}{\partial \omega}\left[\theta \frac{\partial m}{\partial \omega} + (1 + \theta^2)\frac{\partial^2 m}{\partial \omega \partial \theta}\right];$$

ma

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \omega \partial \theta} = - \frac{\theta}{1 + \theta^2} \frac{\partial m}{\partial \omega};$$

quindi

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = 0,$$

come d'altronde è noto.

Ora, supponendo che il parametro ω rappresenti la distanza costante fra una trajettoria ortogonale determinata e la trajettoria ortogonale che si considera, dimostrasi facilmente dover essere A della forma

$$[f_1(\theta) + \omega f_2(\theta)]^2, \tag{5}$$

per cui si avrà:

$$\frac{p' - m}{\sqrt{1 + \theta^2}} = f_1(\theta) + \omega f_2(\theta), \tag{6}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \omega} = - f_2(\theta) \sqrt{1 + \theta^2}.$$

Per questo valore risulterebbe

$$B = (1 + \theta^2)^2 f_2^2(\theta);$$

quindi, dovendo essere B indipendente da θ, sarà $f_2(\theta) = \frac{1}{1 + \theta^2}$, ed in conseguenza

$$\frac{\partial m}{\partial \omega} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}, \qquad \frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

Trasformando la seconda delle equazioni (3), si ottiene:

$$(p' - m) \frac{\partial F}{\partial \omega} + u \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial m}{\partial \omega} = 0,$$

ossia pel valore di A:

$$A \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{1}{2} u \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial A}{\partial \omega} = 0,$$

la quale, integrata, dà:

$$F = f(v, \theta),$$

posto $v = u\sqrt{A}$.

La terza delle equazioni (3), trasformata, conduce dapprima alla

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} - a\lambda\right)(p' - m) \frac{\partial m}{\partial \omega} = u\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \omega} - \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial m}{\partial \theta}\right),$$

e quindi alla

$$(7)\qquad a+\frac{v}{A\sqrt{1+\theta^2}}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{v^2}{2A^2}\frac{1}{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial A(1+\theta^2)}{\partial\theta}-\frac{\sqrt{A}}{\lambda}\right]=0.$$

Per integrare quest'equazione distingueremo i due casi in cui $a=0$ ed $a=-1$. Nel primo caso, dividendo tutti i termini dell'equazione medesima per $\frac{\partial f}{\partial v}$, ed osservando che tanto $\frac{\sqrt{A}}{\lambda}$ come la espressione che moltiplica v^2 sono indipendenti da v, dovrà essere:

$$\frac{v}{A\sqrt{1+\theta^2}}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v}}\frac{\partial f}{\partial\theta}=v^2\varphi_1(\theta)+\varphi_2(\theta),$$

dalla quale

$$f=v^2\psi_1(\theta)+\psi_2(\theta),$$

e sostituendo questo valore nella equazione (7), si hanno, dall'eguagliare i coefficienti delle eguali potenze di v, le due seguenti:

$$\frac{\psi_1'(\theta)}{\psi_1(\theta)}=-\frac{1}{A(1+\theta^2)}\frac{\partial A(1+\theta^2)}{\partial\theta},\qquad \frac{1}{A}\frac{\psi_2'(\theta)}{2\psi_1(\theta)\sqrt{1+\theta^2}}=\frac{\sqrt{A}}{\lambda}.$$

Dalla prima di queste si ottiene:

$$A=\frac{h(\omega)}{\psi_1(\theta)}\frac{1}{1+\theta^2},$$

il qual valore, posto a confronto col valore (5), mostra essere

$$h(\omega)=\omega^2,\qquad \psi_1(\theta)=1+\theta^2,\qquad f_1(\theta)=0,$$

ed in conseguenza

$$f=A(1+\theta^2)u^2+\psi_2(\theta),\qquad \frac{1}{\lambda}=\frac{\psi_2'(\theta)}{2A\sqrt{A}}\frac{1}{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}};$$

od essendo $u=(p'-m)\frac{d\theta}{dt}$, si avrà anche

$$f=A^2(1+\theta^2)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\psi_2(\theta).$$

Notiamo che, essendo $f_1(\theta)=0$, dalla (6) si deduce $p'=0$, quindi $p=c$, per cui le rette rappresentate dalla $\theta=$ cost. passano per uno stesso punto; quindi le due serie di linee $\theta=$ cost., $\omega=$ cost. formano un sistema di coordinate polari, e, ponendo

$\theta = -\operatorname{tang}\varphi$, $\omega = r$, si avranno le

$$\alpha = r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \psi(\varphi), \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\psi'(\varphi)}{2r^3\cos\varphi},$$

i quali risultati coincidono con quelli ottenuti dal professore BERTRAND.

Il caso di $a = -1$ non presenta maggiori difficoltà, come può vedersi nella Memoria di questo Autore. Dunque i due integrali trovati dal professore BERTRAND sono i soli che competono a molti problemi relativi al movimento di un punto libero in un piano *).

10 luglio 1856.

In una Nota letta nella seduta del 10 luglio [1856] e pubblicata nel t. VIII (Nuova Serie) del Giornale dell'Istituto Lombardo, pp. 413-418, mi proponeva di considerare nuovamente la quistione già trattata dai professori BERTRAND e MAINARDI: *Della ricerca degli integrali comuni a molti problemi relativi al movimento di un punto in un piano.* Quella mia Nota aveva per iscopo di ribattere alcune obbiezioni mosse dal prof. MAINARDI all'acuta analisi del BERTRAND, e di mostrare che nel caso del movimento di un punto in un piano i soli integrali comuni a molti problemi erano i due trovati da questo geometra.

La lettura della Memoria del prof. MAINARDI mi aveva condotto a supporre che egli stimasse non abbastanza generali i risultati del BERTRAND, e ponesse in dubbio la

*) Pure il professore MAINARDI deduce uno degli integrali del BERTRAND come caso particolare del proprio integrale? Le considerazioni superiori mostrano come evidentemente ciò doveva aver luogo. Ma non so comprendere come al professore MAINARDI possa *insorger dubbio* su la sussistenza dell'altro integrale, mentre il medesimo si può dedurre dalla stessa sua formola convenientemente modificata. Questa formola però, quale trovasi stampata alla pagina 328 del t. VIII (Nuova Serie) del Giornale dell'Istituto Lombardo, è erronea, giacchè essendo $\int \frac{p'-m}{u}\,d\theta = t$, verrebbe a scomparire il termine contenente il tempo esplicito dalla formola medesima. L'ultimo termine del primo membro di essa va levato via, ed il termine $a\,t$ del secondo membro deve essere affetto da segno positivo. Siccome poi la prima delle equazioni alle derivate ordinarie da cui deducesi questa formola può scriversi

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\theta} + \frac{1}{\omega}\frac{(p'-m)^3}{\Delta} = \frac{p''}{p'-m}\Delta,$$

l'integrale potrà porsi sotto altra forma che comprende il secondo integrale del BERTRAND, come era evidente *a priori.*

sussistenza analitica del secondo integrale trovato dal medesimo autore. Da una Lettera diretta dal prof. MAINARDI a questo Corpo Scientifico *) mi accorsi essere fondata quella mia prima ipotesi, ma di essermi *forse* ingannato per quanto riguarda la seconda.

A sostenere la propria opinione intorno al difetto di generalità delle formole del BERTRAND, il prof. MAINARDI enuncia in questa Lettera un terzo caso, che Egli ha dedotto dalle proprie formole; caso affatto differente dai due del BERTRAND, giacchè questi contengono proprietà pei momenti delle forze, mentre quello corrisponde ad una proprietà per la somma algebrica delle componenti parallele ad una retta data o per la risultante delle forze agenti sul mobile, valutata secondo una direzione fissata ad arbitrio. Colla considerazione di questo terzo caso vengono evidentemente ad esaurirsi tutte le proprietà che potevano aver luogo per quel sistema di forze agenti sul punto; ma, se rammentasi che la questione sta nella ricerca degli integrali comuni a molti problemi pei quali tutti sussista il principio delle forze vive, si concepirà di leggieri che la proprietà caratteristica per quella risultante dovrà rintracciarsi in quel principio; per la qual cosa io stimo che quel terzo caso enunciato dal prof. MAINARDI non ci conduca ad altro che al punto di partenza della quistione **).

Nella Lettera, che ho sopracitato, il prof. MAINARDI dichiara che il dubbio intorno al secondo caso considerato dal BERTRAND, espresso nella sua prima Nota, ebbe origine *dal pensiero che la fisica possibilità sembra la più essenziale condizione agli oggetti delle speculazioni della Meccanica.* Spero di non avere *male inteso* ammettendo che il prof. MAINARDI dubita che il secondo caso del BERTRAND sia *praticamente* possibile. Senza divagarmi in generalità, sebbene forse opportune, mi ristringerò nel campo angusto, ma spesso utile al persuadere, degli esempj, e mi farò a descrivere un semplicissimo congegno meccanico che sembrami si adatti assai bene alla quistione. Si immagini una manovella, la quale possa scorrere entro un perno che ha facoltà di ruotare intorno al proprio asse; una forza diretta a seconda della manovella produca in essa il primo movimento di traslazione; ed una forza costantemente perpendicolare alla medesima la faccia ruotare insieme al perno. Se la grandezza della prima di queste forze è una funzione qualsivoglia della lunghezza di uno dei bracci della manovella, e quella della seconda è reciprocamente proporzionale alla lunghezza medesima, ci troviamo appunto

*) *Lettera del M. E. Prof. G.* MAINARDI *relativa alla sua Nota sugli integrali comuni a molti problemi di Meccanica* [Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo etc., nuova serie, tomo VIII (1856), pag. 472].

**) In una comunicazione fatta recentemente (3 novembre 1856) alla Accademia delle Scienze di Parigi dal prof. BERTRAND [*Note sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique, et sur la théorie des courbes à double courbure,* Comptes rendus etc., t. XLIII (1856), pp. 829-832], viene mostrato all'evidenza essere soltanto apparente la maggiore generalità che il prof. MAINARDI attribuisce alla propria formola, al confronto di quella del distinto geometra francese.

nel secondo caso considerato dal sig. BERTRAND. Parmi non improbabile che i Membri di questo Corpo Scientifico, i quali hanno quelle cognizioni di meccanica pratica od industriale che a me mancano e che a loro invidio, abbiano già incontrato in qualche macchina un congegno simile al descritto; ad ogni modo io credo evidente per tutti *la fisica possibilità* del medesimo. Aggiungerò da ultimo, che, siccome la funzione delle forze in questo caso è

$$U = h \operatorname{ang\,tang} \frac{x}{y} + \int \varphi(r)\, dr,$$

dove h è una costante, x, y ed r hanno gli ordinarj significati, e φ è una funzione qualsivoglia, gli integrali che deduconsi dalle equazioni del movimento saranno comuni a infiniti problemi, e che fra questi integrali trovasi appunto il secondo dei due dichiarati dal chiarissimo prof. BERTRAND come i soli comuni a molti problemi relativi al movimento di un punto in un piano.

6 novembre 1856.

[C.].

CVII.

INTORNO AD UN PROBLEMA DI STATICA RAZIONALE.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana.
Nuova serie, tomo IX (1857), pp. 104-109.

1. Considerando un sistema di forze di forma invariabile riferito a tre assi ortogonali, è noto che il momento del medesimo rispetto ad una retta qualsivoglia può esprimersi mediante un sestinomio, nel quale, oltre gli elementi che individuano la retta, entrano anche linearmente le somme algebriche delle componenti delle forze del sistema parallele ai tre assi ed i loro momenti rispetto ai medesimi. Quindi, supponendo conosciuti i momenti di un sistema per rispetto a sei rette date, si avranno sei equazioni, dalle quali si potranno dedurre i valori di quelle ultime sei quantità, ed istituire ricerche relative a quel sistema di forze senza conoscere individualmente le forze del medesimo. Questo problema, il quale trovasi enunciato in una delle preziose Memorie dell'illustre Direttore *) della Facoltà Matematica dell'Università di Pavia, può rendersi di soluzione meno facile, e questa più praticamente utile, aggiungendo la condizione, che le quantità, le quali entrano a formare i risultati di quelle ricerche, sieno indipendenti dalla posizione degli assi a cui è riferito il sistema, e quindi non contengano che gli elementi necessari ad individuare la posizione relativa delle sei rette. In questa Nota mostriamo come si possa soddisfare a questa condizione nella ricerca della grandezza della risultante e del momento minimo del sistema.

2. Supponendo il sistema di forze riferito a tre assi ortogonali, sieno X, Y, Z le

*) [Gaspare Mainardi, 1800-1879].

somme algebriche delle componenti parallele a quegli assi, ed M_x, M_y, M_z i momenti del sistema rispetto agli assi medesimi. Si indichi con N_r il momento del sistema rispetto ad una retta qualsivoglia, la quale suppongasi comprendere cogli assi ortogonali angoli di cui i coseni sieno a_r, b_r, c_r e passare pel punto di coordinate x_r, y_r, z_r. È noto che, ponendo per brevità

$$l_r = y_r c_r - z_r b_r, \qquad m_r = z_r a_r - x_r c_r, \qquad n_r = x_r b_r - y_r a_r,$$

si ha la relazione:

$$N_r = a_r M_x + b_r M_y + c_r M_z + l_r X + m_r Y + n_r Z. \tag{1}$$

Pongasi in questa equazione $r = 1, 2, \ldots 6$, e dalle sei che ne risultano si deducano i valori di M_x, M_y, M_z; X, Y, Z; i quali, supponendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_6 & b_6 & c_6 & l_6 & m_6 & n_6 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\alpha_r = \frac{\partial \Delta}{\partial a_r}, \quad \beta_r = \frac{\partial \Delta}{\partial b_r}, \quad \gamma_r = \frac{\partial \Delta}{\partial c_r}; \quad \lambda_r = \frac{\partial \Delta}{\partial l_r}, \quad \mu_r = \frac{\partial \Delta}{\partial m_r}, \quad \nu_r = \frac{\partial \Delta}{\partial n_r},$$

saranno:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta X = \sum_1^6 {}_r \lambda_r N_r, & \Delta Y = \sum_1^6 {}_r \mu_r N_r, & \Delta Z = \sum_1^6 {}_r \nu_r N_r, \\ \Delta M_x = \sum_1^6 {}_r \alpha_r N_r, & \Delta M_y = \sum_1^6 {}_r \beta_r N_r, & \Delta M_z = \sum_1^6 {}_r \gamma_r N_r. \end{array} \right. \tag{3}$$

Si osservi che, indicando con δ_{rs} la minima distanza fra le due rette r^{ma} ed s^{ma} e con ω_{rs} l'angolo compreso fra le medesime, si ha:

$$\delta_{rs} \operatorname{sen} \omega_{rs} = a_r l_s + b_r m_s + c_r n_s + a_s l_r + b_s m_r + c_s n_r,$$

per cui, scrivendo il determinante Δ sotto la forma

$$\Delta = - \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_6 & m_6 & n_6 & a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix},$$

e moltiplicando quest'ultima per la (2), si ottiene:

$$\Delta^2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{vmatrix} = -H,$$

essendo: $a_{rs} = \delta_{rs}$ sen ω_{rs} e quindi $a_{rr} = 0$.

Così il determinante λ_1 si può porre sotto le due forme:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_6 & b_6 & c_6 & l_6 & m_6 & n_6 \end{vmatrix}, \qquad - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_6 & m_6 & n_6 & a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix},$$

le quali, moltiplicate fra loro, dànno:

$$\lambda_1^2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_2 & a_3 & \dots & a_6 \\ a_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{26} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_6 & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{66} \end{vmatrix};$$

per cui, ponendo per brevità

$$A_{rs} = \frac{\partial H}{\partial a_{rs}}, \qquad \omega_{rs} \text{ in vece di } \cos \omega_{rs},$$

si giungerà facilmente alla

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 = A_{11}\left(\frac{a_{22}}{\omega_{22}}\right) + A_{11}\left(\frac{a_{32}}{\omega_{32}}\right) + \cdots + A_{11}\left(\frac{a_{62}}{\omega_{62}}\right),$$

$A_{11}\left(\frac{a_{22}}{\omega_{22}}\right)$ rappresentando il determinante A_{11} nel quale agli elementi $a_{22}, a_{23}, \dots, a_{26}$ si sostituiscono gli elementi $\omega_{22}, \omega_{23}, \dots, \omega_{26}$; e così per agli altri. Analogamente si otterrebbe:

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = -\left[A_{12}\left(\frac{a_{21}}{\omega_{21}}\right) + A_{12}\left(\frac{a_{23}}{\omega_{23}}\right) + \cdots + A_{12}\left(\frac{a_{26}}{\omega_{26}}\right)\right],$$

od anche:

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 = -\left[A_{21}\left(\frac{a_{12}}{\omega_{12}}\right) + A_{21}\left(\frac{a_{13}}{\omega_{13}}\right) + \cdots + A_{21}\left(\frac{a_{16}}{\omega_{16}}\right)\right], \text{ ecc.,}$$

mediante le quali formando la espressione

$$N_1(\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2) + N_2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2) + \cdots + N_6(\lambda_1\lambda_6 + \mu_1\mu_6 + \nu_1\nu_6),$$

risulterà eguale a

$$0 + E_1\left(\frac{a_{21}}{\omega_{21}}\right) + E_1\left(\frac{a_{31}}{\omega_{31}}\right) + \cdots + E_1\left(\frac{a_{61}}{\omega_{61}}\right),$$

posto per brevità:

$$E_r = N_1 A_{r1} + N_2 A_{r2} + \cdots + N_6 A_{r6}.$$

Così la espressione

$$N_1(\lambda_2\lambda_1 + \mu_2\mu_1 + \nu_2\nu_1) + N_2(\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2) + \cdots + N_6(\lambda_2\lambda_6 + \mu_2\mu_6 + \nu_2\nu_6)$$

si troverà eguale a

$$E_2\left(\frac{a_{11}}{\omega_{11}}\right) + 0 + E_2\left(\frac{a_{31}}{\omega_{31}}\right) + \cdots + E_2\left(\frac{a_{61}}{\omega_{61}}\right),$$

ed analogamente si troverebbero le altre quattro espressioni della medesima specie. Se da ultimo si moltiplicano quelle espressioni ordinatamente per $N_1, N_2, \ldots, N_6$ e si pone

$$\nabla = \begin{vmatrix} 0 & N_1 & N_2 & \ldots & N_6 \\ N_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{16} \\ N_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{26} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_6 & a_{61} & a_{62} & \ldots & a_{66} \end{vmatrix},$$

la somma dei quadrati delle prime tre equazioni (3) assumerà la forma

$$(4) \qquad HR^2 = \nabla\left(\frac{a_{11}}{\omega_{11}}\right) + \nabla\left(\frac{a_{21}}{\omega_{21}}\right) + \cdots + \nabla\left(\frac{a_{61}}{\omega_{61}}\right),$$

notando che $\nabla\left(\frac{a_{11}}{\omega_{11}}\right)$ deducesi da ∇ ponendo nella seconda linea in luogo degli elementi $N_1, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{16}$ i seguenti: $0, \omega_{11}, \omega_{12}, \ldots, \omega_{16}$, e che

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

3. Osservando che il determinante α_1 si può scrivere sotto la forma

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & n_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_6 & m_6 & n_6 & a_6 & b_6 & c_6 \end{vmatrix},$$

si ha:

$$\lambda_1 \alpha_1 = -\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_6 \\ l_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{26} \\ l_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_6 & a_{62} & a_{63} & \dots & a_{66} \end{vmatrix},$$

e quindi:

$$2(\lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \beta_1 + \nu_1 \gamma_1) = -A_{11};$$

ed analogamente:

$$\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1 + \beta_1 \mu_2 + \beta_2 \mu_1 + \gamma_1 \nu_2 + \gamma_2 \nu_1 = A_{12}, \text{ ecc.}$$

Dunque, moltiplicando fra loro ordinatamente le equazioni (3) e ponendo

$$V = XM_x + YM_y + ZM_z,$$

si ottiene la

(5) $$HV = \tfrac{1}{2} \nabla .$$

Nelle equazioni (4), (5) è contenuta la soluzione del problema che abbiamo fatto scopo di questa Nota.

4. Se supponesi il sistema essere riducibile ad una sola risultante, e coll'indice 7 indichiamo la direzione della medesima, si ha:

$$N_r = R a_{r7},$$

e quindi, essendo $V = 0$, si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{27} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{71} & a_{72} & \dots & a_{77} \end{vmatrix} = 0,$$

la quale relazione fra le minime mutue distanze ed i seni degli angoli compresi fra sette rette nello spazio fu già da me ottenuta col mezzo di considerazioni geometriche, e pubblicata nel vol. 50 del Giornale del signor CRELLE *).

6 novembre 1856.

[C.].

*) BRIOSCHI, *Sur quelques questions de la géométrie de position* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. L (1855), pp. 233-238].

CVIII.

SULLA LINEA DI STRINGIMENTO DI UN SISTEMA DI LINEE A DOPPIA CURVATURA.

Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di lettere, scienze ed arti e Biblioteca Italiana.
Nuova serie, tomo IX (1857), pp. 400-404.

L'equazione caratteristica della linea di stringimento di una famiglia di linee a doppia curvatura, determinata la prima volta dal professore MAGGI in una Memoria pubblicata nel giornale *Il Poligrafo* di Verona *) e recentemente dal professore BORDONI in questo Giornale **) con un metodo che, meglio di quello del MAGGI, corrisponde alla definizione della linea medesima, ammette alcune rimarchevoli trasformazioni, le quali possono tornare di vantaggio tanto nella ricerca delle proprietà generali di essa linea, quanto per individuarla nei casi particolari.

Sia β il parametro variabile dall'una all'altra delle linee del dato sistema, ed α quello di un sistema di linee tracciate sulla superficie, luogo geometrico delle prime. Posto

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \cdots, \qquad f = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \cdots, \qquad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \cdots,$$

l'arco s di una linea qualsivoglia, tracciata su quella superficie, verrà espresso da

$$s'^2 = e\alpha'^2 + 2f\alpha'\beta' + g\beta'^2;$$

*) PIETRO GIUSEPPE MAGGI, *Ricerche sulle linee di stringimento e d'allargamento; aggiuntevi alcune considerazioni meccaniche ed idrauliche* [Il Poligrafo, t. VI (1835), pp. 3-41; t. VII (1835), pp. 49-93].

**) BORDONI, *Nota di geometria analitica* [Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo etc., nuova serie, t. VI (1854), pp. 287-301, 420-438; Memorie dell'Istituto Lombardo, t. V (1856), pp. 265-298].

e la equazione della linea di stringimento della famiglia di linee $\beta =$ cost. risulterà:

$$e^2 \frac{\partial g}{\partial \alpha} + f^2 \frac{\partial e}{\partial \alpha} - 2ef \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{1}$$

Si indichino con λ, μ, ν; a, b, c i coseni degli angoli che le tangenti alle linee $\beta =$ cost., ed alla linea di stringimento, nei punti di intersezione di questa colle prime, formano coi tre assi, e pongasi

$$\lambda a + \mu b + \nu c = \cos\theta. \tag{2}$$

Essendo, come è noto:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \nu = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

si ottiene la

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{1}{2e\sqrt{e}}\left(e\frac{\partial g}{\partial \alpha} - f\frac{\partial e}{\partial \beta}\right),$$

la quale, allorquando si indichi con A il primo membro dell'equazione (1), può anche scriversi:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{1}{2e^2\sqrt{e}}\left[A + f\left(2e\frac{\partial f}{\partial \alpha} - f\frac{\partial e}{\partial \alpha} - e\frac{\partial e}{\partial \beta}\right)\right];$$

ma, denominando r il raggio di curvatura della $\beta =$ cost., ed ω l'angolo compreso fra esso e la normale alla superficie, trovasi facilmente:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{r} = \frac{1}{2\delta e\sqrt{e}}\left(2e\frac{\partial f}{\partial \alpha} - f\frac{\partial e}{\partial \alpha} - e\frac{\partial e}{\partial \beta}\right),$$

dove $\delta = \sqrt{eg - f^2}$; dunque:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{A}{2e^2\sqrt{e}} + \frac{f\delta}{er}\operatorname{sen}\omega;$$

e lungo la linea di stringimento si avrà:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{f\delta}{er}\operatorname{sen}\omega. \tag{3}$$

Osservando inoltre che

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0,$$

giungesi alla

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} a + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} b + \frac{\partial \nu}{\partial \beta} c = \frac{f\delta}{er} \frac{d\beta}{ds} \operatorname{sen} \omega = \frac{f}{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \operatorname{sen} \omega ;$$

ed analogamente:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} a + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} b + \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} c = \frac{e}{\sqrt{e}} \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \operatorname{sen} \omega ;$$

per cui:

$$(4) \qquad \frac{d\lambda}{ds} a + \frac{d\mu}{ds} b + \frac{d\nu}{ds} c = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{r} \operatorname{sen} \omega .$$

Ora derivando rispetto ad s la equazione (2), ed indicando con ρ il raggio di curvatura della linea di stringimento, e con h l'angolo intercetto da esso e dalla tangente la linea $\beta = \text{cost.}$, si ottiene:

$$\frac{d\lambda}{ds} a + \frac{d\mu}{ds} b + \frac{d\nu}{ds} c + \frac{\cos h}{\rho} = - \frac{d\theta}{ds} \operatorname{sen} \theta ;$$

quindi per la (4) si avrà:

$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\operatorname{sen} \omega}{r} + \frac{\cos h}{\rho} = - \frac{d\theta}{ds} \operatorname{sen} \theta ;$$

od anche:

$$(5) \qquad \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\operatorname{sen} \omega}{r} \cos \theta ,$$

per essere

$$\cos h = - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \theta ,$$

rappresentando ε l'angolo compreso dal raggio di curvatura della linea di stringimento e dalla normale alla superficie.

Se le linee della data famiglia saranno rette, le equazioni (3), (5) conducono alle note:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \nu}{\partial \beta} \frac{d z}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} ,$$

le quali evidentemente hanno luogo anche quando le linee $\beta = \text{cost.}$ siano geodetiche per la superficie da esse generata.

Se θ è costante, la (5) dimostra essere pure costante il rapporto fra i raggi di curvatura geodesica corrispondenti delle linee $\beta = \text{cost.}$, e della linea di stringimento; e nel caso particolare che $\theta = \frac{\pi}{2}$, essere geodetica la linea di stringimento.

Immaginando tracciate sulla superficie due altre serie di linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$,

le quali, per maggior semplicità, supporremo ortogonali, si ponga:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \cdots, \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \cdots.$$

È noto che, supponendo

$$\alpha' = m u' + n v', \qquad \beta' = p u' + q v', \qquad H = mq - np,$$

si hanno le relazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} H^2 e = E q^2 + G p^2, \quad H^2 f = E n q + G m p, \quad H^2 g = E n^2 + G m^2, \\ H^2 (e g - f^2) = E G, \end{cases}$$

ed anche le

$$H \frac{\partial e}{\partial \alpha} = q \frac{\partial e}{\partial u} - p \frac{\partial e}{\partial v}, \qquad H \frac{\partial f}{\partial \alpha} = q \frac{\partial f}{\partial u} - p \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad H \frac{\partial g}{\partial \alpha} = q \frac{\partial g}{\partial u} - p \frac{\partial g}{\partial v};$$

per le quali la equazione (1) può scriversi:

$$(7) \qquad q\left(e^2 \frac{\partial g}{\partial u} + f^2 \frac{\partial e}{\partial u} - 2 e f \frac{\partial f}{\partial u}\right) - p\left(e^2 \frac{\partial g}{\partial v} + f^2 \frac{\partial e}{\partial v} - 2 e f \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Derivando le equazioni (6) rispetto ad u, ed osservando che per le medesime si hanno le seguenti:

$$H(f q - e n) = G p, \qquad H(e m - f p) = E q,$$

ottiensi, dopo alcune riduzioni:

$$H^4\left(e^2 \frac{\partial g}{\partial u} + f^2 \frac{\partial e}{\partial u} - 2 e f \frac{\partial f}{\partial u}\right) = G^2 p^2 \frac{\partial E}{\partial u} + E^2 q^2 \frac{\partial G}{\partial u} - 2 E G \left(E q \frac{\partial q}{\partial u} + G p \frac{\partial p}{\partial u}\right);$$

e l'equazione (7) prenderà la forma seguente:

$$q\left[\frac{\partial E}{\partial u} G^2 p^2 + \frac{\partial G}{\partial u} E^2 q^2 - 2 E G \left(E q \frac{\partial q}{\partial u} + G p \frac{\partial p}{\partial u}\right)\right]$$
$$- p\left[\frac{\partial E}{\partial v} G^2 p^2 + \frac{\partial G}{\partial v} E^2 q^2 - 2 E G \left(E q \frac{\partial q}{\partial v} + G p \frac{\partial p}{\partial v}\right)\right] = 0;$$

ossia, essendo $\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}$, posto $\frac{p}{q} = r$, si avrà:

$$G^2 \frac{\partial E}{\partial u} r^2 + E^2 \frac{\partial G}{\partial u} - G^2 \frac{\partial E}{\partial v} r^3 - E^2 \frac{\partial G}{\partial v} r - 2 E G \left(E \frac{\partial r}{\partial v} + G r \frac{\partial r}{\partial u}\right) = 0.$$

Ora, se con ψ indicasi l'angolo compreso dalle tangenti alle linee $\beta = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, e con η quello compreso dalle tangenti alle linee $\beta = \text{cost.}$, $\alpha = \text{cost.}$, dalle note formule di GAUSS si deducono le seguenti:

$$p = -\frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}\eta}\sqrt{\frac{E}{g}}, \qquad q = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\eta}\sqrt{\frac{G}{g}};$$

e da queste:

$$r = -\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{cotang}\psi,$$

per cui l'equazione superiore diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\psi + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\operatorname{sen}\psi + 2\left(\frac{\cos\psi}{\sqrt{E}}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{G}}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\sqrt{EG} = 0,$$

che equivale alla

$$\frac{\partial(\sqrt{E}\cos\psi)}{\partial v} + \frac{\partial(\sqrt{G}\operatorname{sen}\psi)}{\partial u} = 0.$$

Da ultimo, indicando con γ l'angolo compreso dalla linea di stringimento e dalla $v = \text{cost.}$, essendo

$$\cos\psi = \operatorname{sen}(\gamma - \theta), \qquad \operatorname{sen}\psi = \cos(\gamma - \theta),$$

la linea di stringimento sarà rappresentata dall'equazione:

$$\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\cos(\gamma-\theta)}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\right] = \frac{\operatorname{sen}(\gamma-\theta)}{\sqrt{E}}\frac{\partial(\gamma-\theta)}{\partial u} - \frac{\cos(\gamma-\theta)}{\sqrt{G}}\frac{\partial(\gamma-\theta)}{\partial v}.$$

Questa equazione può semplificarsi nei casi speciali, scegliendo opportunamente le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$

4 giugno 1857.

[B.], [Pa.].

CIX.

SOPRA I COVARIANTI DELLE FORME A PIU VARIABILI *).

Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, volume I (1858), pp. 131-132.

La teoria dei covarianti delle forme binarie fece in questi ultimi anni, principalmente pei lavori del CAYLEY e dell'HERMITE, grandissimi progressi. Non così può dirsi di quella dei covarianti delle forme a più variabili, sebbene lo SCHLÄFLI, nella sua pregiata Memoria: *Sul risultante di più equazioni algebriche* **), abbia determinate le equazioni alle derivate alle quali deve soddisfare il discriminante di una forma a più variabili; il SYLVESTER ***) abbia indicato come si potevano ottenere le analoghe equazioni per un invariante qualunque; il COMBESCURE †) abbia effettivamente determinate queste equazioni; il SALMON ††) abbia calcolati gli invarianti della forma cubica a tre variabili, già considerati dall'ARONHOLD †††).

*) Sunto di una Memoria presentata all'I. R. Istituto Lombardo nella tornata del 1° aprile 1858. Questa memoria fu inserita nel tomo I degli Annali di Matematica [XLVIII: t. I, pp. 313-319].

**) SCHLÄFLI, *Ueber die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen* [Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, t. IV, 2ter Abtheilung (1852), pp. 1-74].

***) SYLVESTER, *On the principles of the calculus of forms* [The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. VII (1852), pp. 52-97, 179-217].

†) COMBESCURE, *Sur divers points de la théorie des invariants* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XX (1855), pp. 337-358].

††) SALMON, *Treatise on the higher plane curves* (1852), p. 184.

†††) ARONHOLD, *Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variablen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXIX (1850), pp. 140-159].

Nella prima parte del suo lavoro, il BRIOSCHI, estendendo con lievi modificazioni il metodo immaginato dallo SCHLÄFLI per determinare le equazioni succennate, giunge ad ottenere le equazioni alle derivate, alle quali deve soddisfare un covariante di una forma a più variabili. Senz'entrare qui nei particolari di questo metodo, il BRIOSCHI fa notare soltanto come esso sia preferibile a quello di cui fecero uso il SYLVESTER ed il COMBESCURE nel caso particolare degli invarianti; potendosi pel medesimo ritenere affatto generici i coefficienti della trasformazione.

Stabilite queste equazioni, il BRIOSCHI ha potuto facilmente estendere ai covarianti delle forme a più variabili un teorema relativo ai covarianti delle forme binarie, del quale diede la dimostrazione ed alcune applicazioni, in una nota letta nell'adunanza del 27 marzo 1856 *).

Il teorema generalizzato è il seguente:

Il primo coefficiente di un covariante qualunque di una forma a più variabili è omogeneo rispetto ai coefficienti della forma data, omogeneo in indice di un determinato ordine per ciascuno degli indici, e soddisfa ad un determinato numero di equazioni a derivate parziali. Gli altri coefficienti del covariante si ponno dedurre dal primo mediante operazioni di derivazione.

Osserva il BRIOSCHI che varie altre proprietà dei covarianti delle forme binarie si ponno dimostrare sussistenti anche per quelli delle forme a più variabili. Ma quanto gli parve principalmente desiderabile, fu di trovare per queste forme teoremi analoghi ai due fondamentali nella importante teorica dei covarianti associati delle forme binarie, dovuti all'HERMITE: questa ricerca costituisce la seconda parte del suo lavoro. Limitandosi qui ad enunciare i risultati, nota come, conoscendosi $m + 1$ covarianti d'una forma ad m variabili, si potrà ottenere mediante i medesimi, una funzione omogenea, i coefficienti della quale sieno altri covarianti della forma medesima.

Questa funzione omogenea non è che lo sviluppo Tayloriano della funzione che si ha operando sopra uno dei covarianti dati una sostituzione lineare, i coefficienti della quale sono funzioni determinate degli altri m covarianti. Se assumiamo, per quel primo covariante, la forma stessa, i coefficienti di quello sviluppo si potranno denominare *covarianti associati* agli altri m covarianti. Finalmente, il prodotto di un covariante qualsivoglia della forma proposta per una funzione determinata degli m covarianti dati, dimostrasi eguale ad una funzione razionale, intiera dei covarianti associati. Questo ultimo risultato manifesta l'importanza d'introdurre la considerazione dei covarianti associati anche nella teorica dei covarianti delle forme a più variabili.

[Pa.], [Pi.].

*) [CIV: t. III, pp. 137-141].

CX.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, t. I (1858), pp. 231-233.

Il metodo di trasformazione delle equazioni algebriche denominato di TSCHIRNHAUS, del quale precipuo scopo si è il diminuire il numero dei termini di una equazione algebrica, acquistò valore dopo che i geometri JERRARD ed HAMILTON mostrarono come, mediante la introduzione di un conveniente numero di quantità indeterminate nella trasformata, potevasi giungere in varj casi a quello scopo risolvendo, per la determinazione di quelle quantità, equazioni di grado inferiore della proposta. Così, per esempio, dalla trasformata di una equazione qualsivoglia del quinto grado, si ponno far sparire il secondo, il terzo ed il quarto termine mediante la risoluzione di una equazione del terzo grado. Di quale vantaggio poi sia il diminuire il numero dei termini nelle equazioni, o più in generale l'ottenere trasformate i coefficienti delle quali soddisfino a talune equazioni, in riguardo al problema della risoluzione delle equazioni, basti il citare i recenti importanti risultati ottenuti dal signor HERMITE nella risoluzione delle equazioni del quarto e del quinto grado.

Se non che la calcolazione dell'equazione trasformata, adottando le forme proposte da TSCHIRNHAUS e da JERRARD per la funzione di trasformazione, è talmente complicata e prolissa, che quanto di più importante si è dedotto fino ad ora dalla considerazione della trasformata può dirsi consistere nella dimostrata possibilità di giungere ad alcuni risultati, senza che i risultati medesimi siensi effettivamente ottenuti. È senza dubbio uno dei fatti, che caratterizzerà nella storia dell'analisi l'epoca presente, l'importanza che attaccano in oggi i geometri alla ricerca di metodi generali pei quali venga

a semplificarsi la esecuzione delle operazioni. L'algebra superiore deve a questi metodi molti dei suoi recenti progressi, e noi crediamo debbasi fra questi annoverare la nuova forma analitica proposta dal signor HERMITE *) per la funzione di trasformazione delle equazioni, in quanto che essa apre l'adito a calcolare, mediante un metodo generale, sia i coefficienti della trasformata, sia alcune funzioni dei medesimi, quali sarebbero gli invarianti ed i coefficienti dei covarianti della trasformata medesima. Questo metodo di calcolazione è lo scopo del presente lavoro.

Riassumiamo brevemente le parti principali di esso nei tre seguenti teoremi:

1° Una funzione qualsivoglia dei coefficienti della trasformata (mediante la funzione dell'HERMITE) di una equazione dell' n^{mo} grado, soddisfa ad n equazioni a derivate parziali del primo ordine lineari (n° 2).

2° Se questa funzione dei coefficienti sarà omogenea in indice, e quindi risulterà una funzione omogenea delle n quantità indeterminate componenti la funzione di trasformazione, i coefficienti delle varie potenze e prodotti di queste indeterminate in quella funzione omogenea sono dipendenti gli uni dagli altri; cioè, supposto conosciuto uno di essi, se ne deducono gli altri con semplicissime operazioni (n° 3).

3° Se la funzione dei coefficienti della trasformata che si vuol calcolare sarà un invariante di essa, il coefficiente della più alta potenza di una delle indeterminate è eguale al prodotto dell'invariante della stessa forma rispetto ai coefficienti della equazione proposta per una potenza del primo coefficiente della medesima. Analogamente se la funzione dei coefficienti della trasformata sarà coefficiente di un covariante (n° 4).

1. È noto che una equazione

$$\varphi(x,\ 1) = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)(x,\ 1)^n = 0 \tag{1}$$

può essere trasformata mediante la sostituzione $z = \psi(x)$ in un'altra dello stesso grado:

$$f(z,\ 1) = (A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_n)(z,\ 1)^n = 0\,. \tag{2}$$

Indicando con $c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_{n-1}$ n quantità indeterminate, la forma proposta dal signor HERMITE per la funzione $\psi(x)$ è la seguente:

$$\psi(x) = a_0 c_{n-1} + (a_0 x + n a_1) c_{n-2} + \left[a_0 x^2 + n a_1 x + \frac{n(n-1)}{2} a_2\right] c_{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + (a_0 x^{n-1} + n a_1 x^{n-2} + \cdots + n a_{n-1}) c_0\,,$$

*) HERMITE, *Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 961-967].

per cui indicando con $x_1, x_2, \ldots x_n$ le radici della (1), e con $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ quelle della trasformata (2), si avrebbero le

$$\zeta_1 = \frac{\varphi(x)}{x - x_1}, \qquad \zeta_2 = \frac{\varphi(x)}{x - x_2}, \ldots, \zeta_n = \frac{\varphi(x)}{x - x_n},$$

purchè si pongano nei risultati della divisione le $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots c_0$ in luogo di x^{n-1}, $x^{n-2}, \ldots x^0$.

2. Denoteremo con P, P_m i simboli di operazione

$$P = \sum_1^n {}^r\, r\, a_{r-1} \frac{\partial}{\partial a_r}, \qquad P_m = \sum_1^n {}^r \frac{1}{p_r} A_{m,r} \frac{\partial}{\partial a_r},$$

essendo

$$A_{m,r} = (r - m + 1) p_{m-1} p_r a_{m-1} a_r + (r - m + 3) p_{m-2} p_{r+1} a_{m-2} a_{r+1} + \cdots$$
$$\cdots + (r + m - 1) p_0 p_{r+m-1} a_0 a_{r+m-1},$$
$$p_s = \frac{n(n-1) \ldots (n - s + 1)}{1.2.3 \ldots s}.$$

Sia u una funzione qualsivoglia delle $A_1, A_2, \ldots A_n$; essa soddisfa alle equazioni:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} P(u) &= c_0 \frac{\partial u}{\partial c_1} + 2 c_1 \frac{\partial u}{\partial c_2} + \cdots + (n-1) c_{n-2} \frac{\partial u}{\partial c_{n-1}}, \\ P_m(u) &= \sum_1^{m-1} {}^r (m - r) \gamma_r \frac{\partial u}{\partial c_{n-r}} + \sum_1^{n-m} {}^r\, r\, \delta_r \frac{\partial u}{\partial c_{n-m-r}}, \end{aligned} \right.$$

nella seconda delle quali m può assumere i valori $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ e si è posto:

$$\gamma_r = p_m a_m c_{n-r-1} + p_{m+1} a_{m+1} c_{n-r-2} + \cdots + p_n a_n c_{m-r-1},$$
$$\delta_r = a_0 c_{n-r-1} + p_1 a_1 c_{n-r-2} + \cdots + p_{m-1} a_{m-1} c_{n-m-r}.$$

È evidente che allorquando u sarà una funzione delle differenze delle radici $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, e quindi se u sarà un invariante, un coefficiente di covariante, ecc., della (2), risulterà indipendente dall'indeterminata c_{n-1}, per cui dovrà porsi nei secondi membri delle equazioni superiori $\dfrac{\partial u}{\partial c_{n-1}} = 0$. In questo caso la prima di esse equazioni, e la seconda,

nella quale facciasi $m = 2$, diventano:

$$\sum_1^n r\, r a_{r-1} \frac{\partial u}{\partial a_r} = \sum_1^{n-2} r\, r c_{r-1} \frac{\partial u}{\partial c_r},$$

$$\sum_1^n r (n - r + 1) a_r \frac{\partial u}{\partial a_{r-1}} = \sum_1^{n-2} r (n - r - 1) c_r \frac{\partial u}{\partial c_{r-1}};$$

quindi, se nella funzione u poniamo in luogo di $c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots c_0$ ordinatamente $x^{n-2}, x^{n-3} y, \ldots y^{n-2}$, si ottiene un covariante della forma $\varphi(x, y)$.

3. Suppongo

$$u = \sum \frac{\Pi q}{\Pi r_0 \Pi r_1 \ldots \Pi r_{n-1}} [r_0, r_1, \ldots r_{n-1}] c_0^{r_0} c_1^{r_1} \ldots c_{n-1}^{r_{n-1}},$$

$$(r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} = q).$$

Sostituendo nella prima delle equazioni (3), trovasi che fra i coefficienti sussiste la prima relazione:

$$P([r_0, r_1, \ldots r_{n-1}]) = r_0 [r_0 - 1, r_1 + 1, \ldots r_{n-1}] + 2 r_1 [r_0, r_1 - 1, r_2 + 1, \ldots r_{n-2}] + \cdots$$
$$\cdots + (n-1) r_{n-2} [r_0, r_1, \ldots r_{n-2} - 1, r_{n-1} + 1].$$

Inoltre, ponendo per brevità:

$$\lambda_s = p_m a_m r_{s-1} [\ldots r_{s-1} - 1, r_s + 1, \ldots] + p_{m+1} a_{m+1} r_{s-2} [\ldots r_{s-2} - 1, r_{s-1}, r_s + 1, \ldots] + \cdots$$
$$\cdots + p_n a_n r_{m-n+s-1} [\ldots r_{m-n+s-1} - 1, \ldots r_s + 1, \ldots],$$

$$\mu_s = a_0 r_{m+s-1} [\ldots r_{m+s-1} - 1, \ldots r_s + 1, \ldots] + p_1 a_1 r_{m+s-2} [\ldots r_{m+s-2} - 1, \ldots r_s + 1, \ldots] + \cdots$$
$$\cdots + p_{m-1} a_{m-1} r_s [r_0, r_1, \ldots r_{n-1}],$$

si avranno le $n - 1$ relazioni:

$$P_m([r_0, r_1, \ldots r_{n-1}]) = \sum_{n-m+1}^{n-1} s (m - n + s) \lambda_s + \sum_0^{n-1-m} s (n - m + s) \mu_s.$$

Queste relazioni sono evidentemente in numero maggiore delle necessarie a determinare i coefficienti $[r_0, r_1, \ldots r_{n-1}]$, supposto noto uno di essi. È poi chiaro come si potrà nei casi particolari determinare facilmente il coefficiente della più alta potenza di c_{n-1}.

4. Il coefficiente di c_{n-2}^r nella calcolazione di A_r trovasi essere

$$a_0^{r-1}\left[a_r - rn\frac{a_1}{a_0}a_{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}n^2\frac{a_1^2}{a_0^2}a_{r-2} - \cdots + (-1)^{r-1}rn^{r-1}\frac{a_1^{r-1}}{a_0^{r-1}}a_1 + (-1)^r n^r \frac{a_1^r}{a_0^r}a_0\right].$$

Ora la espressione fra parentesi è eguale al coefficiente di x^{n-r} nella funzione

$$\varphi\left(x - n\frac{a_1}{a_0}, 1\right);$$

quindi se $u(A_0, A_1, \dots A_n)$ è un invariante di grado m della $f(x, y)$, si avrà che il coefficiente di $c_{n-2}^{\frac{mn}{2}}$ del medesimo sarà

$$a_0^{\frac{m(n-2)}{2}} u(a_0, a_1, \dots a_n),$$

e se $u(A_0, A_1, \dots A_n)$ è primo coefficiente di un covariante della $f(x, y)$, di grado m rispetto ai coefficienti e di grado p rispetto alle variabili, risulterà il coefficiente di $c_{n-2}^{\frac{1}{2}(mn-p)}$ eguale ad

$$a_0^{\frac{1}{2}[m(n-2)-p]} u(a_0, a_1, \dots a_n).$$

22 luglio 1858.

[Pa.], [Ca.].

CXI.

SUL METODO DI KRONECKER PER LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI QUINTO GRADO.

Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, tomo I (1858), pp. 275-282.

Nella trasformazione delle funzioni ellittiche presentasi una classe di equazioni di grado pari, per le quali ha luogo la singolare proprietà, che le radici quadrate delle radici delle equazioni medesime sono legate fra loro da un numero di relazioni lineari eguale alla metà del grado dell'equazione.

Questa proprietà, annunziata da JACOBI fino dal 1828 per le equazioni, di cui le radici sono i valori del moltiplicatore per una trasformazione d'ordine numero primo, e per quelle, di cui le radici sono i prodotti dei moltiplicatori pei rispettivi moduli di trasformazione, non era stata sino ad ora estesa ad altre equazioni, nè erasene fatta applicazione veruna.

Il memorabile risultato ottenuto dall'HERMITE intorno la risoluzione delle equazioni di quinto grado mediante l'abbassamento dell'equazione modulare del sesto grado, mi suggerì l'idea dell'abbassamento di quelle equazioni del sesto grado che godono della proprietà suddetta, ed in due articoli inseriti negli *Annali di Matematica* *), dimostrai come questo abbassamento possa effettuarsi, non solo mediante funzioni formate colle radici di quelle equazioni, come quelle di HERMITE lo erano colle radici dell'equazione modulare, ma anche mediante le radici quadrate delle medesime funzioni. L'abbassamento di quelle equazioni conducendo a differenti forme di risoluzione delle

*) [XLIX: t. I, pp. 321-324 e LII: t. I, pp. 335-341].

equazioni del quinto grado, può in certa guisa farsi dipendere la risoluzione di questo problema dalla proprietà scoperta da JACOBI per quella specie di equazioni di grado pari.

Nella tornata del 14 giugno del corrente anno, il signor HERMITE dava comunicazione all'Accademia francese di una lettera di KRONECKER *), nella quale questo geometra annunziava essere giunto da due anni alla risoluzione diretta delle equazioni di quinto grado col mezzo di una risolvente di sesto grado, risolubile per funzioni ellittiche; e faceva conoscere tanto la forma delle sei funzioni delle radici dell'equazione di quinto grado, radici della risolvente, quanto la forma della risolvente medesima.

Nella presente Nota espongo alcune considerazioni atte a rischiarare questo metodo diretto di soluzione delle equazioni del quinto grado, il quale non dubito classificare fra le principali scoperte recenti d'analisi.

I coefficienti di una qualunque delle equazioni di sesto grado, le quali godono della proprietà enunciata più sopra, sono funzioni razionali, intiere di tre quantità, di tal forma che, annullandosi una di queste quantità, si annullano tre fra quei coefficienti, e mediante una opportuna trasformazione può ridursi la equazione quadrinomia risultante ad avere tre coefficienti numerici, ed un solo coefficiente funzione delle altre due quantità (§ I). La teorica delle funzioni ellittiche offre varie equazioni particolari, per le quali la suddetta quantità è nulla, e quindi sono riducibili a quella forma quadrinomia avente un solo coefficiente funzione del modulo (§ II). Se quindi per le equazioni di quinto grado potrà ottenersi una risolvente di sesto grado, la quale abbia quella forma quadrinomia, eguagliando l'unico coefficiente non numerico della medesima al coefficiente funzione del modulo di una di quelle equazioni particolari, si avrà una equazione, mediante la quale si determinerà il valore del modulo in funzione dei coefficienti dell'equazione proposta del quinto grado.

La questione è così ridotta a trovare una risolvente di sesto grado della forma suddetta. Le radici di questa risolvente, oltre alle condizioni generali per una risolvente qualunque, dovranno evidentemente soddisfare a due condizioni particolari, cioè: 1° dovrà verificarsi per esse la proprietà di JACOBI, più volte rammentata; 2° dovranno annullare quella quantità. Ora il signor KRONECKER giunse ad individuare sei funzioni delle radici di una equazione qualunque del quinto grado, delle radici quinte dell'unità, e di una quantità indeterminata, funzioni cicliche rispetto a quelle prime radici, le quali appunto verificano la prima condizione (§ III). Di più, quelle funzioni conducono, per soddisfare alla seconda condizione, ad una equazione del secondo grado rispetto a quella indeterminata, i coefficienti della quale essendo funzioni a due valori delle radici dell'equazione di quinto grado, sono, per un noto teorema, irrazionali del

*) KRONECKER, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 1150-1152].

secondo ordine di funzioni dei coefficienti dell'equazione proposta. In questo modo, soddisfatte quelle due condizioni, la risolvente dovrà avere quella forma quadrinomia particolare, e quindi essere risolubile per funzioni ellittiche.

§ I.

Se le radici $z_1, z_2, \dots z_6$ dell'equazione

$$z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \cdots + a_6 = 0 \tag{1}$$

sono legate fra loro dalle tre equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_4} + \sqrt{z_5} + \sqrt{z_6} = \sqrt{5 z_1}, \\ \sqrt{z_2} + \alpha^2\sqrt{z_3} + \alpha^4\sqrt{z_4} + \alpha\sqrt{z_5} + \alpha^3\sqrt{z_6} = 0, \\ \sqrt{z_2} + \alpha^3\sqrt{z_3} + \alpha\sqrt{z_4} + \alpha^4\sqrt{z_5} + \alpha^2\sqrt{z_6} = 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

nelle quali α è una radice immaginaria dell'equazione $x^5 = 1$, ponendo

$$\sqrt{5 z_1} = 5 A_0, \qquad \sqrt{z_2} + \alpha^4\sqrt{z_3} + \alpha^3\sqrt{z_4} + \alpha^2\sqrt{z_5} + \alpha\sqrt{z_6} = 5 A_1,$$

$$\sqrt{z_2} + \alpha\sqrt{z_3} + \alpha^2\sqrt{z_4} + \alpha^3\sqrt{z_5} + \alpha^4\sqrt{z_6} = 5 A_2,$$

si trovano pei coefficienti $a_1, a_2, \dots$ i seguenti valori *):

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = -10A, \quad a_2 = 35A^2, \quad a_3 = -60A^3 + 10B, \\ a_4 = 55A^4 - 30AB, \quad a_5 = -26A^5 + 30A^2B - C, \quad a_6 = 5(A^3 - B)^2, \end{array}\right. \tag{3}$$

essendo A, B, C funzioni delle A_0, A_1, A_2.

Se

$$A = A_0^2 + A_1 A_2 = 0,$$

l'equazione (1) prende la forma quadrinomia

$$z^6 + 10Bz^3 - Cz + 5B^2 = 0, \tag{4}$$

la quale, ponendo $z = y\sqrt[3]{B}$, diventa

$$y^6 + 10y^3 - \frac{C\sqrt[3]{B}}{B^2}y + 5 = 0,$$

nella quale si ha un solo coefficiente non numerico.

*) [LII: t. I, pag. 336].

§ II.

La teorica delle funzioni ellittiche fornisce varie equazioni di sesto grado, le cui radici soddisfano alle condizioni (2). Indicando con x il moltiplicatore nella trasformazione di quinto ordine, con λ e k i moduli, e ponendo $\sqrt[4]{\lambda} = v$, $\sqrt[4]{k} = u$, $\frac{v}{u} = \rho$, dimostrasi *) che i sei valori di ciascuna delle quantità

$$x, \quad x\rho^2, \quad x\rho^4$$

soddisfano alle equazioni (2), e quindi le tre equazioni che hanno per radici quei tre sistemi di valori avranno la forma della (1). È noto che quelle tre equazioni deduconsi dalla (1) ponendo:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2^8 k^2 k'^2,$$

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 16 \frac{k'^4}{k^2},$$

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 2^8 \frac{k'^2}{k^4}.$$

Vedesi facilmente che i sei valori della quantità

$$x(a + b\rho + c\rho^2)^2,$$

nella quale a, b, c sono costanti, soddisferanno pure alle equazioni (2), per cui l'equazione che ha per radici quei sei valori avrà la forma della (1). Ora il coefficiente del secondo termine in questa equazione risulta $-10[(a + c)^2 + b^2]$, quindi pei valori (3) si avrà:

$$A = (a + c)^2 + b^2,$$

e supponendo $a = -c$, $b = 0$ sarà $A = 0$. Dunque la equazione di cui le radici sono i sei valori della quantità

$$x(1 - \rho^2)^2,$$

sarà della forma (4). Ciò avrà pur luogo per quella di cui le radici sono i sei valori della quantità

$$x(1 - \rho'^2)^2, \quad \text{posto} \quad \rho' = \frac{\sqrt[4]{\lambda'}}{\sqrt[4]{k'}}.$$

---

*) Brioschi, *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVII (1858), pp. 337-341].

Così, affinchè risulti $A = 0$ nell'equazione di cui le radici sono i sei valori della quantità

$$x(a + b\rho^2 + c\rho'^2)^2,$$

dovrà essere:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac - 2bc = 0;$$

e la equazione che ha per radici i sei valori di

$$x(\rho^2 + \rho'^2)^2$$

sarà in conseguenza della forma (4).

Dalle formole di trasformazione, ponendo

$$\mathrm{sn}^2 2\omega = r, \qquad \mathrm{sn}^2 4\omega = s,$$

si hanno le

$$x\rho^2 = k^2 rs, \qquad \rho^2 = k^2 \frac{(1-r)(1-s)}{(1-k^2 r)(1-k^2 s)}, \qquad \rho'^2 = \frac{k'^2}{(1-k^2 r)(1-k^2 s)},$$

quindi:

$$\rho^2 + \rho'^2 = \frac{k^2(1-r)(1-s) + k'^2}{(1-k^2 r)(1-k^2 s)};$$

ma, per le formole dell'addizione:

$$(1 - k^2 rs)^2 = \frac{[k^2(1-r)(1-s) + k'^2]^2}{(1-k^2 r)(1-k^2 s)}, \qquad rs = \frac{(s-r)^2}{(1-k^2 rs)^2};$$

dunque, sostituendo:

$$(\rho^2 + \rho'^2)^2 = \frac{(s-r)^2}{rs(1-k^2 r)(1-k^2 s)},$$

$$x(\rho^2 + \rho'^2)^2 = \frac{(s-r)^2}{(1-r)(1-s)} = \left(\frac{\mathrm{cn}\, 2\omega}{\mathrm{cn}\, 4\omega} - \frac{\mathrm{cn}\, 4\omega}{\mathrm{cn}\, 2\omega}\right)^2. \tag{5}$$

Analogamente trovansi le due formole:

$$\left\{\begin{aligned} x(1-\rho^2)^2 &= \left(\frac{\mathrm{cnc}\, 2\omega}{\mathrm{cnc}\, 4\omega} - \frac{\mathrm{cnc}\, 4\omega}{\mathrm{cnc}\, 2\omega}\right)^2, \\ x(\rho'^2 - 1)^2 &= \left(\frac{\mathrm{dn}\, 2\omega}{\mathrm{dn}\, 4\omega} - \frac{\mathrm{dn}\, 4\omega}{\mathrm{dn}\, 2\omega}\right)^2, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

dalle quali e dalla (5) deduconsi le

$$\frac{1-\rho^2}{k'\rho'} = \frac{\rho'^2 - 1}{k\rho} = \rho^2 + \rho'^2,$$

la prima delle quali è l'equazione modulare.

Le equazioni, le radici delle quali sono i sei valori delle quantità (5), (6), ottengonsi ponendo ordinatamente nella (4):

$$(7)\qquad \begin{cases} B = -\dfrac{16}{k^2 k'^2}, & C = 2^8 \dfrac{1 - 16 k^2 k'^2}{k^4 k'^4}, \\[2ex] B = 16 \dfrac{k'^4}{k^2}, & C = 2^8 \dfrac{k'^8}{k^4}\left(1 + 16 \dfrac{k^2}{k'^4}\right), \end{cases}$$

la seconda delle quali deducesi dalla prima, mutando k in $\dfrac{1}{k'}$.

§ III.

Sopra una classe di risolventi dell'equazione di quinto grado.

1. Se con $\sum \sqrt{z}$ indicasi per brevità la quantità $\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \cdots + \sqrt{z_6}$, la prima delle equazioni (2) equivale alla

$$(8)\qquad \sum \sqrt{z} = (1 + \sqrt{5})\sqrt{z_1} = 2(1 + \alpha^2 + \alpha^3)\sqrt{z_1}.$$

Questa equazione, alla quale devono soddisfare le $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, ..., suggerisce per le medesime la seguente espressione:

$$(9)\qquad \sqrt{z_r} = c_r + \alpha^2(1 + \alpha) b_r.$$

La condizione (8) sarà quindi soddisfatta, se

$$\sum c + \alpha^2(1 + \alpha)\sum b = 2[c_1 + b_1 + \alpha^2(1 + \alpha) c_1],$$

ossia se

$$(10)\qquad \sum c = 2(c_1 + b_1), \qquad \sum b = 2 c_1.$$

Ponendo nelle altre due equazioni (2), per $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$, ... i valori dati dalla (9), trovasi che le medesime sono soddisfatte, se le cinque espressioni

$$c_2 + b_3 + b_6, \quad c_3 + b_4 + b_2, \quad c_4 + b_5 + b_3, \quad c_5 + b_6 + b_4, \quad c_6 + b_2 + b_5$$

sono eguali fra loro. Ora, indicando con m il valore comune a queste cinque espressioni, sommandole ottiensi:

$$\sum c - c_1 + 2\sum b - 2 b_1 = 5m,$$

dalle quali, per le (10), deducesi essere $m = c_1$. Dunque, supponendo

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
b_1 &= \tfrac{1}{2}(c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 - c_1),\\
b_2 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_4 + c_5 - c_2 - c_3 - c_6),\\
b_3 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_5 + c_6 - c_2 - c_3 - c_4),\\
b_4 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_6 + c_2 - c_3 - c_4 - c_5),\\
b_5 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2 + c_3 - c_4 - c_5 - c_6),\\
b_6 &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_3 + c_4 - c_5 - c_6 - c_2),
\end{aligned}
\right.
$$

le espressioni (9) soddisferanno a tutte le condizioni (2). Per questi valori le (9) prendono la forma:

$$
(12) \quad \left\{
\begin{aligned}
\sqrt{z_1} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1\sqrt{5} + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6),\\
\sqrt{z_2} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1 + c_2\sqrt{5} - c_3 + c_4 + c_5 - c_6),\\
\sqrt{z_3} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1 - c_2 + c_3\sqrt{5} - c_4 + c_5 + c_6),\\
\sqrt{z_4} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1 + c_2 - c_3 + c_4\sqrt{5} - c_5 + c_6),\\
\sqrt{z_5} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1 + c_2 + c_3 - c_4 + c_5\sqrt{5} - c_6),\\
\sqrt{z_6} &= \tfrac{1}{2}\alpha^2(1+\alpha)(c_1 - c_2 + c_3 + c_4 - c_5 + c_6\sqrt{5}),
\end{aligned}
\right.
$$

e la equazione del sesto grado, di cui le radici sono le $z_1, z_2, \ldots z_6$, avrà la forma dell'equazione (1).

2. È noto che le sostituzioni, per mezzo delle quali si ottengono le 1.2.3.4.5 permutazioni fra cinque lettere x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, sono tutte comprese nei simboli:

$$
\begin{pmatrix} x_r \\ x_{(ar+b)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_r \\ x_{(ar+b)^3+c} \end{pmatrix},
$$

essendo a, b, c numeri interi minori di 5 *). Per brevità, in luogo dei simboli su-

*) Questo importante teorema è dovuto al mio amico prof. BETTI: *Sopra la risolubilità per radicali delle equazioni algebriche irriduttibili di grado primo* [Annali di scienze matematiche e fisiche compilati da B. TORTOLINI, t. II (1851), pp. 5-19].

periori, faremo uso dei seguenti:

$$\binom{r}{ar+b}, \quad \binom{r}{(ar+b)^3+c}.$$

Ora, considerando una funzione $F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ di quelle cinque lettere, si potranno ottenere i 120 valori che deduconsi dalla medesima per tutte le permutazioni fra quelle lettere nel modo seguente. Si operino sulla funzione F le 24 sostituzioni:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\binom{r}{r}, & \binom{r}{(2r)^3}, & \binom{r}{(2r)^3+1}, & \binom{r}{(2r)^3+2}, & \binom{r}{(2r)^3+3}, & \binom{r}{(2r)^3+4}, \\
\binom{r}{2r}, & \binom{r}{(4r)^3}, & \binom{r}{(4r)^3+1}, & \binom{r}{(4r)^3+2}, & \binom{r}{(4r)^3+3}, & \binom{r}{(4r)^3+4}, \\
\binom{r}{3r}, & \binom{r}{r^3}, & \binom{r}{r^3+1}, & \binom{r}{r^3+2}, & \binom{r}{r^3+3}, & \binom{r}{r^3+4}, \\
\binom{r}{4r}, & \binom{r}{(3r)^3}, & \binom{r}{(3r)^3+1}, & \binom{r}{(3r)^3+2}, & \binom{r}{(3r)^3+3}, & \binom{r}{(3r)^3+4},
\end{array}\right.$$

quindi, sopra ciascuna delle 24 funzioni ottenute, si operino le sostituzioni circolari:

$$(14)\quad \binom{r}{r}, \quad \binom{r}{r+1}, \quad \binom{r}{r+2}, \quad \binom{r}{r+3}, \quad \binom{r}{r+4};$$

in questo modo si avranno i 120 valori cercati.

Supponiamo ora che la F sia una funzione ciclica, cioè invariabile per le sostituzioni (14): in questo caso la funzione F non avrà che i ventiquattro valori dati dalle sostituzioni (13). Se quindi sopra una qualunque di queste ventiquattro funzioni si ripetono le sostituzioni (13), si otterranno ancora quelle ventiquattro funzioni disposte in ordine differente; e così pure, se sopra quelle ventiquattro funzioni, si opera una qualunque delle sostituzioni (13), si otterranno quelle ventiquattro funzioni disposte in ordine differente. Per esempio, indicando con $l_1, l_2, \ldots l_6$; $m_1, m_2, \ldots m_6$; $n_1, n_2, \ldots n_6$; $p_1, p_2, \ldots p_6$, le ventiquattro funzioni che si ottengono operando sulla F le sostituzioni (13) della prima linea, della seconda linea, ecc.; se sulle funzioni medesime si opera la sostituzione $\binom{r}{(2r)^3}$, si hanno quelle funzioni disposte come segue:

$$\begin{array}{llllll}
l_2, & l_1, & p_3, & l_5, & l_4, & p_6; \\
m_2, & m_1, & n_3, & m_5, & m_4, & n_6; \\
n_2, & n_1, & m_3, & n_5, & n_4, & m_6; \\
p_2, & p_1, & l_3, & p_5, & p_4, & l_6.
\end{array}$$

Dal modo col quale trovansi disposte le ventiquattro funzioni nei ventiquattro gruppi che si ottengono operando sulle funzioni $l_1, l_2, \ldots$ tutte le sostituzioni (13), vedesi facilmente che, supponendo

$$\mu_r = m_r - n_r, \qquad \lambda_r = l_r - p_r,$$

se sopra le sei funzioni $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_6$ si operano le dodici sostituzioni (13) della prima e della quarta linea, si ottengono le funzioni medesime disposte in ordine differente e con segni positivi, o negativi; ed operando sulle medesime funzioni le altre dodici sostituzioni, si hanno le funzioni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ disposte in varj modi, pure con segni positivi o negativi. Così, per esempio, operando sulle $\mu_1, \mu_2, \ldots$ le sostituzioni (13) della prima e della seconda linea, si ottengono i due gruppi:

$$\begin{array}{llllll|llllll}
\mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, & \mu_6; & -\lambda_1, & -\lambda_2, & -\lambda_3, & -\lambda_4, & -\lambda_5, & -\lambda_6; \\
\mu_2, & \mu_1, & -\mu_3, & \mu_5, & \mu_4, & -\mu_6; & -\lambda_2, & \lambda_1, & \lambda_5, & -\lambda_6, & -\lambda_3, & \lambda_4; \\
\mu_3, & \mu_1, & -\mu_4, & \mu_6, & \mu_5, & -\mu_2; & -\lambda_3, & \lambda_1, & \lambda_6, & -\lambda_2, & -\lambda_4, & \lambda_5; \\
\mu_4, & \mu_1, & -\mu_5, & \mu_2, & \mu_6, & -\mu_3; & -\lambda_4, & \lambda_1, & \lambda_2, & -\lambda_3, & -\lambda_5, & \lambda_6; \\
\mu_5, & \mu_1, & -\mu_6, & \mu_3, & \mu_2, & -\mu_4; & -\lambda_5, & \lambda_1, & \lambda_3, & -\lambda_4, & -\lambda_6, & \lambda_2; \\
\mu_6, & \mu_1, & -\mu_2, & \mu_4, & \mu_3, & -\mu_5; & -\lambda_6, & \lambda_1, & \lambda_4, & -\lambda_5, & -\lambda_2, & \lambda_3.
\end{array}$$

Ora, osservando al primo di questi gruppi ed alle equazioni (12), scorgesi tosto che, supponendo in queste

$$c_r = \mu_r,$$

le quantità $z_1, z_2, \ldots z_6$ per le sostituzioni (13) della prima linea diventerebbero:

$$\begin{array}{llllll@{\qquad}llllll}
z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & z_5, & z_6; & z_4, & z_1, & z_5, & z_2, & z_6, & z_3; \\
z_2, & z_1, & z_3, & z_5, & z_4, & z_6; & z_5, & z_1, & z_6, & z_3, & z_2, & z_4; \\
z_3, & z_1, & z_4, & z_6, & z_5, & z_2; & z_6, & z_1, & z_2, & z_4, & z_3, & z_5;
\end{array}$$

ed analogamente le sostituzioni della quarta linea darebbero di nuovo le funzioni $z_1, z_2, \ldots$ disposte in altro ordine. Gli altri due gruppi corrispondenti alle sostituzioni della seconda e della terza linea condurrebbero a dodici modi differenti di disposizione di sei funzioni $y_1, y_2, \ldots y_6$, le quali si deducono dalle $z_1, z_2, \ldots$, sostituendo in esse le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ alle $\mu_1, \mu_2, \ldots$

Possiamo in conseguenza formulare il seguente teorema:

Una funzione simmetrica qualunque delle sei quantità $z_1, z_2, \ldots z_6$ *date dalle for-*

mole (12), *nelle quali suppongasi* $c_r = \mu_r$, *non potrà avere che due valori per tutte le permutazioni possibili delle lettere* $x_0, x_1, \ldots x_4$.

Quella funzione sarà quindi esprimibile col mezzo di radicali del secondo ordine pei coefficienti dell'equazione di quinto grado, che ha per radici le $x_0, x_1, \ldots x_4$. Dunque i coefficienti dell'equazione di sesto grado avente la forma (1), di cui le radici sono le $z_1, z_2, \ldots$, saranno esprimibili per quelli di una equazione qualunque di quinto grado. Abbiamo così ottenuta *una classe di risolventi* della equazione di quinto grado.

3. Aggiungiamo un esempio assai semplice di questa specie di risolventi. Posto

$$(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_0) = (0\,1\,2\,3\,4),$$

ed $l_1 = \frac{1}{2}(0\,1\,2\,3\,4)$, si hanno le

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = (0\,2\,4\,1\,3), \quad \mu_4 = (2\,1\,4\,0\,3), \quad \lambda_1 = (0\,1\,2\,3\,4), \quad \lambda_4 = (2\,0\,1\,3\,4),\\
&\mu_2 = (0\,4\,2\,3\,1), \quad \mu_5 = (3\,2\,0\,1\,4), \quad \lambda_2 = (0\,3\,4\,1\,2), \quad \lambda_5 = (3\,1\,2\,4\,0),\\
&\mu_3 = (1\,0\,3\,4\,2), \quad \mu_6 = (4\,3\,1\,2\,0); \quad \lambda_3 = (1\,4\,0\,2\,3), \quad \lambda_6 = (4\,2\,3\,0\,1).
\end{aligned}$$

Ora, osservando che fra questi valori delle $\mu_1, \mu_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sussistono le relazioni:

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6,\\
2\lambda_2 &= \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 - \mu_6,\\
2\lambda_3 &= \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \mu_5 + \mu_6,\\
2\lambda_4 &= \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 - \mu_5 + \mu_6,\\
2\lambda_5 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \mu_5 - \mu_6,\\
2\lambda_6 &= \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 - \mu_5 + \mu_6,
\end{aligned}$$

posto $c_r = \mu_r$ ed $h = \alpha^2(1 + \alpha)$, le equazioni (12) si ridurranno alle

$$\sqrt{z_r} = h(\lambda_r + h\mu_r) = \frac{h}{2}(2\lambda_r + \mu_r\sqrt{5} - \mu_r).$$

Se con Δ indicasi il prodotto delle differenze delle radici, cioè se supponesi

$$\Delta = -\lambda_r\mu_r,$$

i coefficienti di questa risolvente saranno funzioni razionali di Δ e dei tre invarianti I_1, I_2, I_3 di quarto, ottavo e dodicesimo grado della forma di quinto grado. Se supponesi

$$p = \frac{5^2\sqrt{5}}{a_0^4}\frac{I_1}{\Delta}, \qquad q = \frac{5^{10}\sqrt{5}}{a_0^{12}}\frac{2^{10}I_3}{3\Delta^3},$$

(essendo a_0 il coefficiente del primo termine dell'equazione di quinto grado), si trovano per le quantità A, B, C, mediante le quali sono formati i coefficienti dell'equazione (1), i seguenti valori:

$$2A = b^3\Delta(5p-3),$$

$$8B = b^9\Delta^3[5^2(p-1)(p+1)^2 - 8q],$$

$$4C = -b^{15}\Delta^5 . 5^3 . q(p+1)^2 .$$

4. Suppongasi ora che nella funzione F entri linearmente una quantità indeterminata v, cioè sia

$$F = \varphi + v\psi,$$

e φ, ψ sieno funzioni cicliche di $x_0, x_1, \ldots x_4$. Per quanto si è dimostrato, i coefficienti della equazione del secondo grado rispetto a v

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 0,$$

saranno irrazionali del secondo ordine di funzioni dei coefficienti dell'equazione di quinto grado. Determinando v per mezzo di questa equazione, la equazione di sesto grado, di cui le radici sono $z_1, z_2, \ldots$, avrà la forma (4), e quindi sarà risolubile per funzioni ellittiche.

Poniamo:

$$x_0 x_1^2 x_2^2 + v x_0^3 x_1 x_2 = 0\,1\,2,$$

$$l_1 = 012 + 123 + 234 + 340 + 401 .$$

Le ventiquattro sostituzioni (13) daranno i valori delle 24 funzioni $l_1, l_2, \ldots m_1, \ldots$, e quindi quelli di $\mu_1, \mu_2, \ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Ora, fra queste ultime espressioni si hanno le relazioni:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = 2(\mu_1 - \lambda_1),$$

$$\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 - \mu_6 = 2(\mu_2 - \lambda_2),$$

$$\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = 2(\mu_3 - \lambda_3), \text{ ecc.,}$$

quindi, ponendo nelle equazioni (12) $c_r = \mu_r$, si avranno le

$$\sqrt{z_r} = \mu_r - b\lambda_r .$$

Queste espressioni differiscono di un fattore costante da quelle del signor KRONECKER.

25 novembre 1858.

[B.], [Pa.].

CXII.

RAPPORTO SOPRA UNA MEMORIA DEL GENERALE GIOVANNI CAVALLI *).

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 31-39.

Il motto degli Accademici del Cimento comprende ancor oggi l'essenza del metodo nella ricerca delle leggi le quali reggono i fenomeni della natura. L'illustre Lamé, in una comunicazione all'*Accademia delle Scienze di Parigi* nel maggio dell'anno scorso, dalla considerazione dei progressi scientifici del nostro secolo era condotto a delineare nel seguente modo la via da seguirsi nella scoperta dei segreti della natura: osservare ed esperimentare i fatti in tutte le circostanze realizzabili; coordinare queste osservazioni e queste esperienze in modo da raggrupparle sotto un certo numero di leggi; poi coll'ajuto del calcolo diminuirè successivamente il numero di queste leggi, facendole entrare le une nelle altre, per giungere finalmente ad una sola legge *principio parziale* della classe dei fenomeni studiati. Così pensano e lavorano, egli aggiunge, così hanno pensato e lavorato i nostri fisici, i nostri chimici, i nostri geologi, i nostri mineralisti.

Tentando e ritentando osservazioni ed esperienze, ecco da più di due secoli la base unica di ricerche utili nello studio dei fenomeni naturali; quella base senza la quale lo studio stesso perderebbe il suo carattere scientifico, giacchè, come disse benissimo il mio egregio amico Ausonio Franchi, *la scienza è la cognizione ridotta in sistema, quella cioè che muove da principj certi ed evidenti, onde trae le sue conclusioni con un ordine così regolare e necessario, da poterne dimostrare efficacemente agli altri la verità.*

*) G. Cavalli, *Sur la théorie de la résistance statique et dynamique des solides, surtout aux impulsions comme celles du tir des canons* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXII, pp. 157-233].

Chi segue quella via abbandonerà quindi ad altri lo scrutare l'essenza delle cose, nè si farà propugnatore a priori di alcun principio assoluto; per esso la filosofia naturale sarà il complesso di quei segreti strappati alla natura, ma strappati nell'unico modo possibile, nel modo razionale e scientifico che abbiamo descritto.

Ma un'altra via fu anche seguita nelle ricerche fisico-matematiche. *Per essa*, sono parole di Lamé, *si parte da un principio parziale ipotetico, posto a priori, preso a prestito da una teoria prossima, o che l'insieme dei fenomeni sembra additare; il geometra sottopone questo principio alla prova analitica della spiegazione dei fatti, allo scopo di porre a confronto i numeri così calcolati con quelli che sono dati direttamente dall'osservazione e dall'esperienza, e di poter dedurre dalle loro coincidenze o dalle loro differenze la verificazione od il rifiuto del principio ammesso.*

Sarebbe indubbiamente opera utile l'instituire per i varj rami della fisica un parallelo fra i progressi ottenuti nei medesimi, seguendo il primo metodo induttivo, od il secondo deduttivo; questo parallelo condurrebbe assai probabilmente a provare che, se il metodo induttivo usato nella sua purezza diede buoni risultati nella ricerca delle leggi colle quali sono governati alcuni fatti fisici prodotti dalla volontà umana, non può dirsi sia stato finora da solo un potente ausiliare ai progressi della fisica; mentre il metodo deduttivo, o meglio un metodo parte induttivo e parte deduttivo, condusse bensì a qualche risultato ritenuto buono per alcun tempo, e quindi abbandonato per essersene dimostrata sperimentalmente l'erroneità, ma ha per sè, non foss'altro, le scoperte di Fresnel e le successive, per le quali seguendo quell'indirizzo venne a perfezionarsi la teorica delle luce. E se questo fosse il risultato di quel parallelo, dobbiamo noi arguirne che il secondo metodo sia più opportuno, più potente del primo; oppure dedurre che lo stato delle nostre cognizioni matematiche si presta meglio all'uso del metodo deduttivo; oppure, anche che le cognizioni matematiche necessarie all'applicazione del primo metodo non sono ancora tanto diffuse, quanto lo dovrebbero essere? Prendiamo ad esempio l'idrodinamica: essa è una scienza sperimentale, e come tale fu sempre considerata dai lavori di Leonardo da Vinci a quelli di un nostro collega *); si raccolsero molte ed utili osservazioni, se ne indussero alcune leggi, si applicarono, e si ebbero eccellenti risultati; eppure Eulero, da *una teoria* apparentemente *prossima*, l'idrostatica, *prende a prestito un principio parziale ipotetico*, l'eguaglianza di pressione in tutti i versi, e stabilisce le equazioni del moto dell'acqua; moltissimi geometri dopo di lui, specialmente italiani, tentano dedurre da quelle formole le leggi di quel movimento; si spendono in queste ricerche tesori di ingegno e di tempo, e non un risultato pratico si ottiene, o se pure uno esiste, è la certezza della erroneità di quelle formole a rappresentare quel movimento. E notisi che le conseguenze ottenute da esse

*) [Elia Lombardini].

formole si posero a paragone con quelle ottenute dalla osservazione, si dedussero in casi speciali alcuni coefficienti numerici di riduzioni; ma questi ultimi dovettero modificarsi più e più volte, ed oggi ancora sono posti in contestazione. Ma, se i soli risultati utili nell'idraulica si ottennero col metodo induttivo, possiamo noi dire d'altra parte che esso siavi stato applicato in modo completo? Noi siamo ancora ben lontani da ciò: le osservazioni sui nostri fiumi sono ancora troppo incomplete per poter intraprendere, anche sopra un solo di essi, un lavoro finito, e quì, dove ebbe culla l'idraulica, siamo oggi costretti ad invidiare i grandi lavori condotti a termine negli Stati Uniti, ed a studiare in opere sul Mississipì come il metodo induttivo possa soddisfare a tutte le esigenze della teoria e della pratica. Una seconda specie di quistioni, nelle quali le conseguenze dell'applicazione dei due metodi possono dirsi oggi conosciute e valutabili, è quella che riguarda la resistenza che i materiali adoperati in generale nelle costruzioni oppongono alle forze di trazione, di compressione, di flessione, di torsione agenti sopra di essi.

Leggendo la bella introduzione storica al *Traité analytique de la résistance des solides* di GIRARD, ed i lavori più recenti di TREDGOLD, HODGKINSON, FAIRBAIRN, MOSELEY, MORIN, ecc., nasce spontanea la domanda, come mai l'Italia, alla quale per opera del GALILEO e del GRANDI spetta il merito d'aver dato origine alle ricerche sulla resistenza dei materiali, non trovasi rammentata nelle discussioni che si fanno intorno alla lunga serie di osservazioni e di esperienze eseguite specialmente nel nostro secolo? Io credo non ingannarmi, asserendo che tra noi non si fecero esperienze di qualche conto; vi fu bensì chi scrisse di scienza di costruzione partendo o dall'ipotesi di GALILEO, o da quelle di MARIOTTE o di HOOKE, o da un'altra qualunque; anché in questo caso l'ingegno non era al disotto delle difficoltà incontrate, ma le conseguenze, od erano erronee, o, per difetto di esperienze, non poterono condurre a risultato numerico, solo utile nella pratica.

Le ragioni di questo fatto sono però in buona parte evidenti, e se non identiche, certamente almeno della stessa natura di quella per la quale ponno trovare spiegazione altri fatti analoghi.

Le esperienze sulla resistenza dei materiali furono quasi tutte intraprese in occasione di lavori di costruzione, dalle esperienze di MARIOTTE nel 1680 intese a determinare lo spessore dei tubi di condotta dell'acqua allorquando *fu deciso che vi sarebbero a Versailles meraviglie in fatto di cascate e di getti d'acqua* *), fino alle recentissime dell'instancabile FAIRBAIRN sulla resistenza che oppone il ferro all'urto dei projettili lanciati a grande velocità **). Ora le grandi costruzioni presuppongono, od

*) *L'Ancienne Académie des Sciences*, par M. MAURY, pag. 37.

**) FAIRBAIRN, *Sur les propriétés du fer et sur le degré de résistance qu' il peut offrir au choc*

una intelligente iniziativa da parte del governo, od una abitudine d'associazione contratta nel lungo uso di libertà politiche ed amministrative; e come queste due circostanze, all'una od all'altra delle quali devonsi le principali costruzioni della Francia, dell'Inghilterra, degli Stati Uniti, non si verificarono per più di quarant'anni in Italia, così non si costrusse, non si esperimentò. Ecco dunque quale è la condizione di un costruttore fra noi. Il geologo, il mineralista, il chimico gli avranno fornito, rispetto ai materiali di cui intende far uso, tutti quei dati dai quali riescono determinate le proprietà di giacitura, di cristallizzazione, di composizione chimica dei medesimi; egli conoscerà perfettamente qual posto i materiali stessi occuperanno in una classificazione scientifica piuttosto che in un'altra; ma, se crede necessaria alla stabilità della costruzione la conoscenza di quei numeri che rappresentano la loro resistenza alla trazione, alla flessione o ad altro sforzo, dovrà ricorrere, quando ciò sia possibile, a tabelle le quali contengono risultati d'osservazioni e di esperienze eseguite in Francia, in Inghilterra, negli Stati Uniti, sopra materiali di analoga specie. E non è d'uopo essere molto addentro nella pratica dei risultati di queste sperienze per sentire una certa renitenza a far uso dei medesimi per materiali di cui non siasi prima dimostrata la perfetta identità; se, per esempio, riflettiamo risultare da recenti esperienze *), che le resistenze alla rottura per trazione diretta in pezzi d'acciajo, ne' quali il grado approssimativo di carburazione ogni cento parti sia 0,33; 0,48; 0,63; 0,84; 1,25, sono ordinatamente rappresentate da chilogrammi 47,80; 59,00; 70,80; 86,50; 108,60; come potremo arrischiarci, per quanto nella pratica si assumano numeri di molto inferiori, a ritenere applicabili i numeri, che dànno la resistenza dell'acciajo alla trazione, a qualità d'acciajo anche poco differenti?

Dalle cose premesse voi converrete con me, essere altamente lodevole il pensiero che mosse il generale Cavalli ad intraprendere nell'Arsenale di Torino una serie di esperienze sulla resistenza alla trazione, alla compressione ed alla flessione sopra varie qualità di ferro fuso, di acciajo e di bronzo, allo scopo di riconfermare alcune sue idee, intorno al limite di stabilità, esposte in una Memoria precedente a quella della quale oggi vi rendo conto, ed allo scopo più speciale di applicare i risultati di quelle esperienze al calcolo delle resistenze delle costruzioni di artiglieria destinate a sostenere lo sforzo del tiro.

Le conseguenze d'ordine teorico delle esperienze del generale Cavalli ponno raggrupparsi nel modo seguente:

---

des projectiles lancés à toute vitesse, Extrait d'un mémoire lu à l'Institut Royal de Londres dans la séance du 9 mai 1862 [Bulletin de la Société d'Encouragement, 2me série, t. X (1863), pp. 402-413].

*) Vickers, *Sur la résistance de l'acier relativement aux différents proportions de carbon qu' il contient* [Bulletin de la Société d'Encouragement, 2me série, t. X (1863), pp. 561-567].

1° In un solido (ferro fuso, acciajo, bronzo) sottoposto a flessione, osservasi che le flessioni sono distinte in due parti, le une elastiche (*retournantes*), permanenti (*restantes*) le altre, dal principio fino alla rottura: le prime riconoscono la loro causa in quella proprietà del solido che si denomina elasticità, le seconde in quella che chiamasi duttilità. Ciascuna parte segue una legge differente ma regolare, dal più piccolo carico a quello producente la rottura. Si osserva inoltre, esistere un termine intermedio nella serie dei carichi, pel quale le barre sottoposte a flessione cessano di sostenere in modo stabile, ed incomincia in esse una specie di stanchezza, la quale va aumentando coll'aumentare del carico.

2° La proporzionalità delle flessioni alle forze, o la legge di Hooke, *ut tensio sic vis*, sussiste per le sole flessioni elastiche; le permanenti seguono un'altra legge. Le esperienze eseguite non giunsero a determinare questa legge; giunsero però ad escludere che le flessioni permanenti sieno, come suppone Hodgkinson, proporzionali ai quadrati delle forze. La differenza caratteristica fra le prime e le seconde consiste in ciò, che le prime sussistono sempre quante volte si carichi e si scarichi del peso il solido assoggettato a flessione, mentre le seconde non si producono se non oltrepassando il carico che le ha determinate.

3° Ne consegue che il limite d'elasticità ammesso fino ad ora non esiste, l'elasticità dei corpi essendo sempre crescente sino alla rottura. Ma, in suo luogo, le esperienze hanno dimostrato l'esistenza di un altro limite, quello di stabilità, cioè il carico che il solido può sopportare in modo stabile, o pel quale le flessioni non aumentano col tempo.

4° Partendo dal fatto sperimentale, che la resistenza alla estensione per unità di superficie sia differente dalla resistenza alla compressione, ed accettando in generale la teoria di Navier rispetto alla superficie delle fibre invariabili, questa viene a modificarsi, giacchè il centro di gravità della sezione non coincide più col centro di figura, intendendosi per centro di gravità della sezione il punto in cui la direzione della risultante di tutti gli sforzi di trazione e di compressione incontra la sezione medesima. L'espressione pel momento di rottura di un solido a sezione rettangolare, pel quale sia b la larghezza, h l'altezza, risulterebbe, per esempio, in questa ipotesi:

$$\frac{1}{3} b h^2 \frac{P\sqrt{Q}}{\sqrt{P}+\sqrt{Q}},$$

rappresentando P la resistenza alla compressione, Q quella alla trazione *).

*) Il sig. Roffiaen, nel suo *Traité sur la résistance des matériaux*, pag. 196, aveva già dato alcune formole relative a questa ipotesi; esse però, come dimostra il generale Cavalli nella sua Memoria, non sono completamente esatte.

5° Benchè la legge delle flessioni permanenti non sia conosciuta, pure si può determinare coi risultati ottenuti il *lavoro totale elastico,* ed il *lavoro totale duttile* ai limiti di stabilità e di rottura.

Non mi farò a descrivere la macchina costrutta nell'Arsenale di Torino, colla quale il generale Cavalli eseguì le sue esperienze; osserverò solo, che per mezzo di un ingegnoso congegno tutti i movimenti del prisma sottoposto ad esperienza sono trasmessi ad una matita, la quale traccia quei movimenti, ed in dimensioni molto maggiori, sopra una striscia di carta che passa con moto uniforme sotto la matita stessa. In questo modo ottengonsi su quelle striscie di carta due curve, le ascisse delle quali rappresentano i carichi, e le ordinate le flessioni elastiche, o le flessioni permanenti.

La permanenza degli allungamenti pel caso di solidi sottoposti ad estensioni, e delle flessioni per solidi soggetti a flessione, erasi già presentata ad Hodgkinson nella numerosa serie d'esperienze da lui fatte sulla resistenza dei materiali, e più particolarmente sulla resistenza dei metalli. Da queste esperienze risulta, che gli allungamenti e le flessioni permanenti si producono dall'applicazione dei più piccoli pesi; che i primi si mantengono proporzionali ai pesi fino a 15 chilogrammi per millimetro quadrato; che oltre questo limite aumentano assai rapidamente, od in proporzione maggiore degli allungamenti totali; e che le flessioni permanenti, come si disse più indietro, sono proporzionali ai quadrati dei pesi; oppure, come risultò da esperienze più precise, sono proporzionali alle potenze 1,88 dei carichi. Il generale Morin, nell'ultima edizione delle sue *Lezioni di meccanica pratica,* riferendo le esperienze ed i risultati ottenuti da Hodgkinson, osserva che forse in queste esperienze non si è tenuto conto di un elemento, il quale può avere molta influenza sui risultati; cioè non *sembra che siasi cercato di verificare se il tempo, il quale aumenta gli allungamenti permanenti allorquando il solido è sottoposto all'azione del carico, non contribuisca anche a farli sparire quando si tolga il peso* *).

Le esperienze del generale Cavalli rispondono a questa objezione di Morin, la quale non sappiamo però se sia perfettamente conforme al fatto, giacchè leggiamo in un importante lavoro sulle ricerche sperimentali di Hodgkinson **), che in alcune esperienze « *chaque poids restait sur la poutre pendant cinq minutes, et la flexion permanente était prise deux fois: la première une minute et la seconde cinq minutes après le déchargement de la poutre; l'expérience a démontré qu'un plus long-temps ne produit qu'un petit changement dans la valeur de la perte d'élasticité* ».

Rammentando questa discrepanza d'opinioni intorno agli allungamenti ed alle fles-

---

*) Morin, *Résistance des matériaux,* pag. 11.

**) Hodgkinson, *Recherches expérimentales sur la résistance et les diverses propriétés de la fonte de fer* [Annales des Ponts et Chaussées, 3ᵉ série, t. IX (1855), pp. 1-127].

sioni permanenti, non ebbi altro scopo che di dare una nuova prova dell'importanza delle esperienze intraprese dal generale CAVALLI; tanto più che, accettando anche le considerazioni pratiche di MORIN, il quale dice non essere necessario nella applicazione di calcolare a parte le flessioni permanenti allorquando non si oltrepassino i limiti di stabilità delle costruzioni, pure, siccome in pratica questo limite si oltrepassa senza inconvenienti per tempi brevissimi, come nel caso di allungamenti o flessioni prodotte da impulsioni, così è assai importante di riempire questa lacuna, e dare alla pratica formole semplici anche per questi casi.

Accennerò da ultimo ad alcune interessanti quistioni discusse col mezzo di quelle formole sul finire della Memoria, le quali riguardano gli effetti della percossa dei projettili sulle corazze delle navi; ed in modo speciale la penetrazione o l'azione perforante dei projettili: soggetto importantissimo, ed intorno al quale anche recentemente gli Inglesi fecero a Schaeburyness una lunga serie d'esperienze.

Questo breve riassunto del lavoro del generale CAVALLI vi avrà nuovamente mostrato a quanti problemi pratici siano legati i risultati delle esperienze sulla resistenza dei materiali. Se da una parte la base sperimentale per le costruzioni civili e per la costruzione delle macchine è posta in quelle esperienze, dall'altra le esperienze stesse forniscono i dati necessarj alla miglior scelta dei metodi di offesa e di difesa; e così, mentre servono al progresso di tutte le arti che fioriscono in tempi di pace, offrono nuovi mezzi all'arte della guerra.

Spero perciò non illudermi nell'esprimere la fiducia, che esperienze di questa specie, sia nell'uno o nell'altro indirizzo, saranno fra non molto intraprese anche fra noi. Comunque sia, è mia opinione che la *Classe di scienze matematiche e naturali dell'Istituto*, ringraziando il generale CAVALLI del dono della sua Memoria, debba esprimergli l'interesse che essa prende ai risultati delle sue esperienze, ed il vivo desiderio che le medesime possano essere attivamente continuate.

4 febbraio 1864.

[C.].

CXIII.

SOPRA UNA NUOVA TRASFORMAZIONE DELL'INTEGRALE ELLITTICO.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 46-48.

Sia $u(x, y)$ una forma biquadratica

$$u(x, y) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 y + 6 a_2 x^2 y^2 + 4 a_3 x y^3 + a_4 y^4,$$

ed $h(x, y)$ il covariante biquadratico della medesima, cioè

$$h(x, y) = h_0 x^4 + 4 h_1 x^3 y + 6 h_2 x^2 y^2 + 4 h_3 x y^3 + h_4 y^4,$$

essendo

$$h_0 = a_0 a_2 - a_1^2, \qquad h_1 = \tfrac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2), \qquad \ldots$$

È noto che l'integrale ellittico

$$\frac{dx}{\sqrt{u(x)}},$$

dove si è posto per brevità $u(x)$ in luogo di $u(x, 1)$, si può trasformare in due differenti modi nell'integrale

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - s\lambda - t}},$$

nel quale s, t sono gli invarianti quadratico e cubico della forma u. Nella prima tra-

sformazione, dovuta ad HERMITE *), si suppone:

$$\lambda = -\frac{h}{u};$$

nella seconda, la quale presuppone la conoscenza di una radice dell'equazione $u(x,y)=0$, si fa:

$$\lambda = -\frac{x\frac{\partial h}{\partial x_1} + y\frac{\partial h}{\partial y_1}}{x\frac{\partial u}{\partial x_1} + y\frac{\partial u}{\partial y_1}}.$$

$x_1 : y_1$ essendo il valore di quella radice **).

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare la esistenza di una terza trasformazione della stessa specie.

Indicando con $u'(x)$, $u''(x)$, $u'''(x)$ ... le espressioni

$$\frac{1}{4}\frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{3.4}\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{1}{2.3.4}\frac{d^3u}{dx^3}, \quad \ldots$$

pongasi:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left[u''(x) + \sqrt{a_0 u(x)}\right]; \tag{1}$$

si avrà quadrando:

$$4\lambda^2 - 4\lambda u''(x) + u''^2(x) = a_0 u(x),$$

o trasportando tutto in un membro:

$$(a_0\lambda + h_0)x^2 + 2(a_1\lambda + h_1)x + \tfrac{1}{4}(a_0 a_4 - a_2^2 + 4\lambda a_2 - 4\lambda^2) = 0,$$

ossia:

$$[(a_0\lambda + h_0)x + a_1\lambda + h_1]^2 = \tfrac{1}{4}a_0(4\lambda^3 - s\lambda - t). \tag{2}$$

Quindi la relazione reciproca della (1) sarà la seguente:

$$x = \frac{-(a_1\lambda + h_1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_0\varphi(\lambda)}}{a_0\lambda + h_0}, \tag{3}$$

posto:

$$\varphi(\lambda) = 4\lambda^3 - s\lambda - t.$$

---

*) HERMITE, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LII (1856), pp. 1-38].

**) BRIOSCHI, *Sopra una trasformazione dell'integrale ellittico* [LXII: t. II, pp. 29-34]. — *Recherches d'analyse mathématique*, Extrait d'une lettre de M. BRIOSCHI à M. HERMITE [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVI (1863), pp. 659-663].

Ora, derivando l'equazione (1) rispetto ad x, si ottiene:

$$\frac{d\lambda}{dx} = u'''(x) + \sqrt{a_0}\,\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}},$$

o per la stessa (1):

$$\frac{d\lambda}{dx}\sqrt{a_0 u(x)} = -\,u''(x)u'''(x) + a_0 u'(x) + 2\lambda u'''(x);$$

ma si dimostra facilmente essere

$$a_0 u'(x) - u''(x)u'''(x) = 2(b_0 x + b_1),$$

quindi sostituendo si avrà:

$$\frac{d\lambda}{dx}\sqrt{a_0 u(x)} = 2[(a_0\lambda + b_0)x + a_1\lambda + b_1],$$

o per la (2):

$$\frac{dx}{\sqrt{u(x)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

La sostituzione (1) o la reciproca (3) conducono adunque ad una trasformazione dell'integrale ellittico della specie delle due già note. Evidentemente saremmo giunti ad analogo risultato ponendo:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}[u''(x) - \sqrt{a_0 u(x)}],$$

ed in questa ipotesi avremmo ottenuto:

$$\frac{dx}{\sqrt{u(x)}} = -\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

24 febbraio 1864.

[Pi.], [Pa.].

CXIV.

SOPRA UNA FORMOLA DI JACOBI PER LA MOLTIPLICAZIONE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali, volume I (1864), pp. 344-349.

1. Nelle pregiate Memorie intorno la teorica delle funzioni ellittiche, colle quali JACOBI nei primi volumi del Giornale di CRELLE preludeva alla sua celebre opera *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* *), si riscontrano appena enunciati alcuni risultamenti, poco più che adombrati, sebbene con mano maestra, alcuni argomenti, i quali, al dire dello stesso autore, dovevano essere più ampiamente svolti in una seconda parte dell'opera citata. Ma quell'illustre geometra, continuamente occupato, nella sua breve e travagliata esistenza, in nuove ed alte ricerche in tutti i rami delle matematiche, non potè compiere il primitivo disegno, e le accennate quistioni formarono tema per altri geometri a notevoli lavori posteriori; fra i quali basterà citare quelli sulla divisione delle funzioni ellittiche, e la bella memoria dell'HERMITE sulla divisione delle funzioni abeliane; oltre i lavori più recenti sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado, fondata sopra le proprietà, in parte già enunciate da JACOBI, per le equazioni del moltiplicatore.

In una delle suddette Memorie di JACOBI, pubblicata nel Giornale di CRELLE **), oltre ad alcuni risultati importantissimi risguardanti la trasformazione e la divisione

*) Regiomonti, 1829.

**) JACOBI, *Suite des notices sur les fonctions elliptiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. IV (1829), pp. 185-193].

delle funzioni ellittiche, l'autore osserva come le formole per la moltiplicazione di queste funzioni possano essere semplicemente formate per mezzo di talune espressioni delle derivate di due particolari funzioni irrazionali che egli assegna; ed aggiunge, ad esempio, le formole relative dalla duplicazione alla quintuplicazione. Sebbene in progresso di tempo ricerche su questo argomento sieno state fatte da varj matematici, nessuno, che io sappia, prese a soggetto di esse quel primo risultato ottenuto da JACOBI; ed a mio avviso, se esso fu dimenticato, lo fu a torto, giacchè, come mostrerò or ora, quel risultato costituisce quanto di più generale sia stato scritto sulla quistione. Aggiungerò infine che, quantunque in questo breve lavoro io non abbia di mira che la moltiplicazione delle funzioni ellittiche, pure il metodo da me seguito nel completare quel primo risultato di JACOBI, prestasi a consimili ricerche sopra trascendenti di più elevato ordine; il che fornisce una nuova prova di quanto già dissi sulla bontà della via aperta da JACOBI *).

2. Sieno:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n} + x^{2(n+1)},$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \cdots + b_{n-1} x^{2(n-1)},$$

$$\Delta(x) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \quad A(x) = x\Delta(x), \quad B(x) = \frac{1}{x}\Delta(x).$$

Se supponesi che la equazione

$$f^2(x) - \varphi^2(x) A^2(x) = 0 \tag{1}$$

abbia $2n+1$ radici eguali ad x^2, e denominasi y^2 l'ultima radice, si ha pel teorema di ABEL:

$$(2n+1)\frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{dy}{\Delta(y)};$$

ed evidentemente l'equazione (1) darà:

$$y = \frac{a_0}{x^{2n+1}}.$$

Ora, indicando con

$$f^{(r)}, \quad \varphi^{(r)}, \quad A^{(r)}, \quad B^{(r)}, \quad \ldots$$

le derivate d'ordine r delle funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, $A(x)$, $B(x)$ ... rispetto ad x^2;

*) Vedi in proposito il mio lavoro: *Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LIX (1864), pp. 769-775].

ponendo

$$\Pi(r) = 1.2.3 \ldots r, \qquad \frac{1}{\Pi(r)} \varphi^{(r)} = b_{r+1}, \qquad \frac{1}{\Pi(r)} A^{(r)} = H_{r-1},$$

ed osservando che, pei valori di $f(x)$ e di $\varphi(x)$:

$$f^{(n+1)} = \Pi(n+1), \quad f^{(n+2)} = f^{(n+3)} = \cdots = 0, \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n+1)} = \cdots = 0;$$

dalle derivate $(n+1)$-esima, $(n+2)$-esima, ... $2n$-esima rispetto ad x^2 dell'equazione identica

$$f(x) = \varphi(x) A(x) \tag{2}$$

si ottengono le

$$\left\{\begin{array}{l} H_1 b_n + H_2 b_{n-1} + \cdots + H_n b_1 = 1, \\ H_2 b_n + H_3 b_{n-1} + \cdots + H_{n+1} b_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_n b_n + H_{n+1} b_{n-1} + \cdots + H_{2n-1} b_1 = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

dalle quali si ponno dedurre i valori di $b_1, b_2, \ldots b_n$. Ma dividendo l'equazione (2) per x^2, si ha l'equazione identica

$$\frac{1}{x^2} f(x) = \varphi(x) B(x);$$

quindi, osservando che

$$\left[\frac{1}{x^2} f(x)\right]^{(n+1)} = a_0 \left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n+1)},$$

se si pone

$$\frac{1}{\Pi(r)} B^{(r)} = K_{r-1},$$

si otterrà l'equazione

$$K_1 b_n + K_2 b_{n-1} + \cdots + K_n b_1 = \frac{(-1)^{n+1} a_0}{x^{2(n+2)}} = (-1)^{n+1} \frac{y}{x^3}. \tag{4}$$

Indicando con H il determinante

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_n \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_n & H_{n+1} & \cdots & H_{2n-1} \end{vmatrix},$$

e con K l'analogo determinante formato cogli elementi $K_1, K_2, \ldots$, il primo membro dell'equazione superiore (4) moltiplicato per H sostituendo i valori delle $b_1, b_2 \ldots$,

dedotti dalle equazioni (3), è eguale al determinante

$$\begin{vmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_n \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_n & H_{n+1} & \cdots & H_{2n-1} \end{vmatrix};$$

ma, essendo $A(x) = x^2 B(x)$, si ha:

$$H_r = x^2 K_r + K_{r-1}; \tag{5}$$

quindi quest'ultimo determinante eguaglia la espressione

$$x^{2(n-1)} K,$$

e la equazione (4) darà finalmente la formola generale per la moltiplicazione d'ordine dispari $(2n+1)$ delle funzioni ellittiche:

$$y = (-1)^{n-1} x^{2n+1} \frac{K}{H}. \tag{6}$$

3. Per la moltiplicazione di ordine pari $2n$, ponendo

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + x^{2n},$$

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \cdots + b_{n-1} x^{2(n-1)},$$

supponendo che la equazione

$$f^2(x) x^2 - \varphi^2(x) \Delta^2(x) = 0$$

abbia $2n$ radici eguali ad x^2 ed una radice eguale ad y^2, si ha l'equazione trascendente

$$2n \frac{dx}{\Delta(x)} = \frac{dy}{\Delta(y)},$$

alla quale corrisponde la relazione algebrica

$$y = -\frac{b_0}{x^{2n}}.$$

Ora, essendo identicamente

$$f(x) = \varphi(x) B(x),$$

si hanno dapprima le n equazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} K_0 h_n + K_1 h_{n-1} + \cdots + K_{n-1} h_1 = 1\,, \\ K_1 h_n + K_2 h_{n-1} + \cdots + K_n h_1 = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_{n-1} h_n + K_n h_{n-1} + \cdots + K_{2n-2} h_1 = 0\,; \end{cases}$$

e siccome

$$\left[\frac{1}{x^2}\varphi(x)\right]^{(n-1)} = b_0\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} b_0 \frac{\Pi(n-1)}{x^{2n}}\,,$$

si avrà la

$$(8)\quad h_n - \frac{1}{x^2} h_{n-1} + \frac{1}{x^4} h_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{x^{2(n-1)}} h_1$$

$$= (-1)^{n-1} b_0 \frac{1}{x^{2(n-1)}} = (-1)^n y x^2\,.$$

Ma, sostituendo nel primo membro di questa equazione i valori di h_n, h_{n-1}, ... dedotti dalle (7), si ha il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^4} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2(n-1)}} \\ K_1 & K_2 & K_3 & \dots & K_n \\ K_2 & K_3 & K_4 & \dots & K_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} & K_n & K_{n+1} & \dots & K_{2n-2} \end{vmatrix},$$

il quale, per la relazione (5), è eguale alla espressione

$$\frac{1}{x^{2(n-1)}}\begin{vmatrix} H_2 & H_3 & \dots & H_n \\ H_3 & H_4 & \dots & H_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_n & H_{n+1} & \dots & H_{2n-2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^{2(n-1)}} V\,;$$

quindi, indicando con U il determinante

$$\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_{n-1} \\ K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} & K_n & \dots & K_{2n-2} \end{vmatrix},$$

si dedurrà dalla (8) la

$$y = (-1)^n \frac{V}{x^{2n} U}. \tag{9}$$

Dalle formole (6), (9) si deducono quelle date da JACOBI nella Memoria citata; esse sono per la duplicazione e la quadruplicazione:

$$\text{sen.am}\, 2u = -\frac{1}{x^2 K_0}, \qquad \text{sen.am}\, 4u = \frac{H_2}{x^4 (K_0 K_2 - K_1^2)},$$

e per la triplicazione e quintuplicazione:

$$\text{sen.am}\, 3u = x^3 \frac{K_1}{H_1}, \qquad \text{sen.am}\, 5u = -x^5 \frac{K_1 K_3 - K_2^2}{H_1 H_3 - H_2^2}.$$

Formole analoghe alle trovate sopra si ottengono considerando, in luogo delle espressioni irrazionali $A(x)$, $B(x)$, le $\frac{1}{A(x)}$ ed $\frac{1}{B(x)}$, come JACOBI aveva già osservato.

[B.], [Pa.].

CXV.

NOTIZIE BIOGRAFICHE SULL'INGEGNERE FRANCESCO COLOMBANI.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, Classe di scienze matematiche e naturali,
volume II (1865), pp. 51-65.

Nella tornata del 17 novembre ultimo scorso, il Presidente della Camera dei deputati annunciava una dolorosa perdita fatta da quell'assemblea il dì innanzi con queste nobili parole:

« Un nuovo luttuoso annunzio io debbo dare alla Camera. L'onorevole nostro collega FRANCESCO COLOMBANI, deputato di Lodi, non è più! Egli passava di questa vita nel giorno di jeri in Tromello di Lomellina.

« Il mio dolore, o signori, è l'eco del dolor vostro. Chiunque conobbe il COLOMBANI, lo amò, lo venerò, lo pianse innanzi tempo estinto!

« Quella sua ineluttabile fermezza, quel santo amor suo verso la patria, verso tutto ciò che era grande, giusto ed onesto, quel suo sagace intelletto, quella rara sua diligenza e cura nell'esame dei più ardui temi sottoposti al nostro giudizio, quella sua sempre libera, sempre franca, sempre generosa parola, fecero del COLOMBANI uno degli uomini più stimati, più degni.

« La sua memoria non sarà spenta mai negli animi nostri, e rimarrà all'Italia nobile ed imperituro esempio di cittadina virtù.

« Possano queste mie parole tergere una lagrima alla valorosa e giovinetta prole ch'ei lascia a piangere sulla tomba del migliore, del più affettuoso dei padri ».

La Camera accoglieva le parole del suo Presidente con segni generali di approvazione. Essa attestava con questo atto che quei sentimenti di stima e di affetto pel

perduto collega erano comuni a tutti; mentre la commozione e il cordoglio che si leggevano in volto a coloro, i quali avevano avuto più intime relazioni col COLOMBANI, erano una viva prova che i sentimenti stessi tanto più eransi fatti forti e profondi, quanto maggiore era la conoscenza di lui. Ma quelle parole, dirette specialmente ad apprezzare il COLOMBANI come cittadino, come patriota, come rappresentante della nazione, taciono naturalmente di altri meriti suoi, voglio dire di quelli che egli acquistossi coi lavori scientifici. E parvemi fosse dovuto al nostro Istituto, cui egli appartenne e concorse ad illustrare con alcuna sua comunicazione, il rendere questo tributo allo scienziato che la morte rapiva immaturamente all'Italia; ed a me in ispecial modo, sebbene da non molti anni legato a lui da conoscenza personale, incumbesse questo debito, sia per una certa comunanza di studj e di alcuni ordini di idee che ad essi riferisconsi, sia perchè i continui ritrovi della vita parlamentare avevano in breve tempo contribuito a stabilire fra noi vincoli di sincera amicizia.

FRANCESCO COLOMBANI nacque in Milano nel 1813, e qui fece gli studj elementari, ginnasiali e liceali con eccezionale distinzione. Chi il conobbe a quell'epoca, rammenta che in lui, giovinetto studioso e di vivo ingegno, era prevalente l'attitudine agli studj matematici. A questi il troviamo infatti dedicato dal 1831 al 1833 nell'Università di Pavia, in quegli anni nei quali la parola chiara ed esatta dell'illustre BORDONI, nelle lezioni sul calcolo differenziale ed integrale, era eccitamento agli alunni ad ulteriori studj, ancorchè a questi, per soddisfare ai bisogni della pratica, dovesse poi darsi altro indirizzo.

Niuno è in Italia che ignori le speranze e i tentativi dei patrioti in quell'epoca; le disillusioni e le persecuzioni che ne furono conseguenza. Il COLOMBANI, venuto in sospetto della polizia austriaca d'essere uno degli affigliati alla *Giovine Italia*, dovette fuggire nell'autunno del 1833, ed esulare in Francia, lasciando incompiuti gli studj universitarj. Giunto in Parigi, ottenne poco dopo di presentarsi agli esami d'ammissione alla Scuola di Ponti e Strade, e dietro il felice esito di essi, potè nei tre anni, dal 1834 al 1837, seguire i corsi dati in quella celebre scuola. Ebbe fra gli altri a maestri il NAVIER ed il CORIOLIS, ma furono specialmente le lezioni di quest'ultimo, le quali lasciarono nel COLÓMBANI più profonda impressione; il che se io non tenessi direttamente da lui, potrei mostrare cogli scritti suoi attinenti a questioni di meccanica applicata, nei quali le dottrine ed i metodi dell'illustre ingegnere francese sono citati con particolare distinzione, e presi a modello. L'ordinamento della Scuola di Ponti e Strade prescrivendo che gli allievi dal 1° di maggio al 30 di ottobre siano inviati in missione nei dipartimenti, allo scopo di assistere e prendere parte a lavori in corso di esecuzione, ed esercitarsi così sotto la direzione dei capi di servizio alla pratica della professione dell'ingegnere, il COLOMBANI fu destinato nell'ultimo anno a seguire la costruzione delle strade ferrate di S. Germain e di Versailles, riva destra, diretta con tanto

onore dal CLAPEYRON. Di questa epoca e delle squisite doti d'animo e di mente che distinguevano il direttore di quei lavori, egli pure rapito non ha guari alla Francia da immatura morte, il COLOMBANI conservò sempre grata memoria; egli parlava spesso anche in questi ultimi anni della gratitudine da lui dovuta al CLAPEYRON, sentimento che in una delle sue pubblicazioni esprimeva nel 1842 colle seguenti parole: « *Vorrei che la natura di questo scritto mi permettesse di esternargli pubblicamente non solo la stima e l'ammirazione che gli professo, ma ben anche la riconoscenza che per tante ragioni gli debbo* ».

Però le molte ore dal COLOMBANI dedicate in quel tempo allo studio, le occupazioni pratiche dell'aspirante ingegnere, non lo distoglievano dall'adoperarsi colla numerosa emigrazione italiana a pro del paese. Egli fu durante la sua dimora in Parigi uno dei membri del club politico italiano, e là strinse relazioni coi più distinti ed operosi patrioti, fra i quali citeremo il FARINI ed il MAMIANI.

Nell'anno 1838, l'amnistia data dall'imperatore d'Austria ricondusse il COLOMBANI in patria. Il diploma ottenuto a Parigi non gli valse per esercitare la professione di ingegnere, e dovette a quest'uopo conseguire la laurea dottorale nell'Università di Pavia.

Fu poco dopo averla ottenuta che egli ammogliossi con una giovinetta milanese, GIUSEPPINA CALVI, figlia dell'ingegnere ANASTASIO, conosciuto favorevolmente fra noi, e stimato per le sue cognizioni pratiche risguardanti l'idraulica nei rapporti colla agricoltura. Il COLOMBANI passò circa a quell'epoca ad abitare in Lodi, ed ivi postosi a praticare presso l'ingegnere DE-STEFANI, visse alcuni anni completamente assorto nelle affezioni domestiche, ed in quegli studj teorico-pratici d'idraulica, ai quali sono dovuti i principali suoi lavori *).

Però poco prima di quest'epoca egli aveva già dato prova di sapere con molta opportunità accoppiare le cognizioni teoriche alle pratiche in un opuscolo *Sul taglio dei cunei dei ponti in isbieco*, pubblicato in Milano nel 1838. Lo scopo di esso era di determinare quale sistema d'*apparecchio*, cioè quale disposizione per quelle superficie e per quelle linee, le quali dividono una volta nelle sue parti costituenti, dette cunei, fosse conveniente adottare nei ponti in isbieco molto obliqui. Il BORDONI aveva già trattato una quistione analoga, ma da un altro punto di vista, in una sua interessante nota di stereotomia pubblicata nel 1826. Il problema propostosi dal BORDONI era strettamente di stereotomia; egli ammetteva che il sistema d'apparecchio fosse quello pel quale i letti dei cunei sono tutti porzioni di piani paralleli all'asse della volta, e passanti per una normale ed una curva di fronte, e proponevasi di determinare la forma dei cunei,

*) Queste ed altre notizie sulla vita del COLOMBANI ricavai da un bell'articolo necrologico pubblicato nel giornale *Il Comune* di Lodi pochi giorni dopo la morte del COLOMBANI, e dovuto al professor ERNESTO PASSERINI.

il modo di tagliarli, la robustezza dei loro spigoli. Ma questo sistema non essendo ammissibile pei ponti molto obliqui, perchè incompatibile colla loro solidità, il Colombani si propose di considerare questo caso, e fissatosi sul sistema d'apparecchio al quale corrisponde la massima solidità, fece intorno ad esso tutte quelle ricerche, le quali conducono al tracciamento degli spigoli di intradosso ed ai modelli o sagome pel taglio dei cunei. Non mi fermerò più a lungo su questo primo lavoro del Colombani, nè mi occuperò del metodo seguito in quelle ricerche, sebbene vi si mostri perizia nell'uso della geometria analitica e della geometria descrittiva; giacchè oggi quei metodi sono abbandonati, ed il taglio delle pietre forma quasi un ramo di scienza a sè, od almeno per l'ingegnere, la più importante delle applicazioni della geometria descrittiva.

Il lavoro principale del Colombani, per la mole e per la straordinaria accoglienza avuta, sicchè ormai ne è quasi esaurita la terza edizione, è il *Manuale pratico di idrodinamica ad uso degli ingegneri*. Esso fu pubblicato la prima volta in Milano nel 1842, e presentato modestamente al pubblico come un lavoro, il quale non aspirava che a potere con vantaggio surrogare l'*uso della tavola parabolica* del De-Regi. La distribuzione metodica delle materie in questo manuale, la quale non subì modificazioni radicali nelle altre edizioni, mi è sempre parsa molto opportuna, e migliore di quella adottata in altre opere straniere della stessa specie. La prima parte di essa, intitolata *Origine dell'acqua,* è divisa in tre capitoli; il primo dei quali, che riguarda l'estrazione dell'acqua da un recipiente, è un compiuto trattato di idrometria, coll'aggiunta dei risultati delle esperienze eseguite per determinare l'effetto degl'imbuti di varie forme sulla quantità d'acqua sgorgante da una luce in lastra sottile; e della descrizione delle macchine destinate ad elevare l'acqua.

Il giovane ingegnere, in questa prima parte, oltre la soluzione di un gran numero di esempj numerici e casi pratici, i quali lo abilitano anche all'uso delle varie tavole pei coefficienti di riduzione contenuti nelle formole per le portate, trova le cognizioni principali sulle pratiche del Milanese, del Lodigiano, del Cremonese, del Mantovano... per la dispensa delle acque correnti; infine alcune nozioni sulle sorgenti d'acqua, sul prodotto dei fontanili, sui serbatoj per le acque piovane. Corrispondono a questa sezione alcune importanti tavole, nelle quali sono riassunti i risultati delle molte esperienze istituitesi dal Michelotti, dal Bidone, dal Tadini, dal Castel, dal Poncelet e dal Lesbros per determinare la portata effettiva degli orifizj rettangolari, liberi, in lastra sottile e piana, ed a contrazione completa; quella di uno stramazzo libero, quella degli orifizj circolari, ed i coefficienti di riduzione per gli imbuti conici convergenti.

La seconda parte dell'opera dedicata alla conduttura dell'acqua, contiene un primo articolo intorno la condotta dell'acqua nei tubi, ed un secondo sul movimento dell'acqua nei canali e nei fiumi. Senza farmi ad esaminare minutamente le materie trattate in questi articoli, osserverò anzitutto che il mio giudizio su questa seconda parte del manuale

d'idrodinamica del COLOMBANI non è così completamente favorevole, rispetto all'ultima edizione del 1861, come per la prima del 1842; sebbene le quistioni trattate in quelle edizioni siano le stesse, gli stessi i metodi; anzi nella terza di esse, come nella seconda, siano aggiunte alcune considerazioni sul problema dei rigurgiti prodotti dalle tombe a sifone; problema intorno al quale l'autore pubblicò uno speciale lavoro, di cui dirò più avanti. Ma a caratterizzare meglio questa differenza di giudizj è necessario soffermarci un istante a considerare lo stato ed i progressi dell'idraulica in quel periodo di tempo.

Premetto che io divido pienamente l'opinione espressa più volte dal COLOMBANI nei suoi lavori, essere l'idraulica una scienza sperimentale ed in molta parte puramente d'osservazione; essa per me fa parte di quella filosofia naturale, che il NEWTON definiva nei suoi immortali principj, colle parole: *In hac philosophia propositiones deducuntur ex phœnomenis, et redduntur generales per inductionem;* definizione la quale, assunta dal PRONY ad epigrafe nelle sue *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, traccia l'unica via a seguirsi per dare all'idraulica il carattere di scienza. Ma sebbene intorno a questo indirizzo nelle ricerche idrauliche non siavi attualmente contestazione alcuna, pure, nell'applicazione di esso, e precisamente sul sussidio che le matematiche debbono prestare ad esse, le opinioni sono ancora discordi. Le due scuole più opposte sono di quelli che vorrebbero assegnare alle matematiche il tenue ufficio di compendiare in una formola o di rappresentare graficamente le varie fasi di un fenomeno, alla determinazione delle quali il calcolo sia rimasto estraneo e la sola osservazione vi abbia partecipato; e degli altri, i quali partendo da una ipotesi, oppure da un fatto sperimentale, ma pel quale essendo sconosciuta l'azione o la distribuzione delle forze interne che lo producono, se ne assume una ipotetica, ed applicando ad essa i principj generali della meccanica razionale, si impiegano le matematiche come lo strumento più adatto ed in alcuni casi il solo possibile a dedurre da quei principj quelle che soglionsi denominare le soluzioni dei problemi.

Per questa seconda scuola l'esperienza e l'osservazione non servono che od a diminuire le difficoltà di alcune operazioni di calcolo, ristringendo i limiti della quistione (ciò che però presenta, nel maggior numero dei casi, altre difficoltà); oppure a determinare alcuni coefficienti numerici, pei quali il risultato ottenuto acquisti, se è possibile, un valore pratico. Per me, obbligato a pronunciarmi per l'una o per l'altra di queste due scuole, non dubiterei, trattandosi di idraulica, di associarmi ai fautori della prima, benchè ad essa si faccia l'appunto di scuola empirica. È bensì vero che il DUPUIT *), accennando a questa scuola, soggiunge: *des expériences, si nombreuses qu'elles soient,*

*) *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux.* Deuxième édition, pag. 42.

loin d'être un avantage, sont un inconvénient lorsqu'elles ne sont pas guidées par une saine théorie; elles ne font alors que donner l'apparence de la vérité à des erreurs graves. Ma questa sentenza, benchè indubbiamente dovuta a persona molto autorevole, non parmi possa essere presa alla lettera, come si fa da qualche autore; essa, considerata isolatamente, acquista l'importanza di una apprezzazione generale, alla quale l'autore stesso non potrebbe aderire. Ed infatti gli empirici non potrebbero a lor volta domandare al sig. Dupuit: quale è la sana teoria che deve guidare l'esperimentatore; se quella, per esempio, per la quale la resistenza dovuta alla coesione dei fluidi è per ciascun filetto fluido ritenuta proporzionale al rapporto fra il differenziale della velocità del medesimo ed il differenziale della sua distanza dal pelo dell'acqua, come egli aveva ammesso nella prima edizione dei suoi studj; oppure quella che assegna a quella resistenza un valore proporzionale al quadrato di quel rapporto, come egli assume nella seconda edizione, perchè, come egli dice, le accurate esperienze di Darcy, fatte *laissant de côté toute hypothèse, toute théorie préconçue* *), hanno dimostrato che la coesione sarebbe meglio rappresentata da quella seconda espressione? Nell'idraulica non è quindi quistione di sane teorie o di principj generali astratti; queste teorie e questi principj, o li vediamo sconfessati dai loro stessi autori, perchè non si adattano a successive esperienze; oppure conducono, per una via laboriosa e piena di difficoltà analitiche, a risultati che il pratico non può accettare. I fenomeni dell'idraulica sono fenomeni dei più complessi, forse unicamente paragonabili per la loro natura a quelli della meteorologia; l'esperienza e l'osservazione devono quindi, o separarli nei loro elementi, allorquando ciò sia possibile, o misurarli dai loro effetti. Ma v'ha di più: l'idraulico non può accontentarsi dello studio dei fenomeni naturali, egli deve tirare partito dalla molteplice azione che l'acqua può avere, o come forza motrice, o nella irrigazione, o nella navigazione; da ciò un'altra serie di fenomeni, che potremmo dire artificiali, ai quali deve rivolgere la propria attività.

Però, coll'asseverare che l'osservazione e l'esperienza costituiscono l'unico mezzo di ricerca nell'idraulica, siamo ben lungi dall'ammettere che esso possa essere adoperato a caso. Questo scoglio devono sopratutto cercare di evitare gli addetti alla prima delle nominate scuole, ed è in un efficace uso di alcuni mezzi che ponno ad essi offrire le matematiche che, a mio avviso, troveranno in buona parte una guida sicura in quelle ricerche.

Per me non ho difficoltà di ammettere col Dupuit, che: *les mathématiques sont à l'ingénieur ce que la grammaire est à l'écrivain; elles dirigent les idées, mais elles n'en donnent pas;* aggiungo anzi essere nell'abuso o nel cattivo uso che alcuni geometri fecero delle matematiche nella soluzione di problemi concreti, nella pretensione di so-

*) Vedi Dupuit, opera citata, prefazione della seconda edizione.

stituire le matematiche sole allo studio accurato dei fatti, che dobbiamo ricercare la causa prima di quella scissura fra i teorici ed i pratici, la quale principalmente fra noi esercitò una triste influenza sui progressi delle scienze positive applicate. Ma la scissura cesserà il giorno in cui i pratici conosceranno che i teorici, i quali si chiamano PONCELET, LESBROS, WEISBACH, BOILEAU, FRANCIS... offrono loro una serie di proposizioni dedotte da numerose esperienze sulla misura delle portate delle bocche e degli orificj, le quali potranno applicare alla ricerca dei deflussi dei canali e dei fiumi; quando considereranno che teorici quali DUBUAT, PRONY, BIDONE, EYTELWEIN, DARCY, BAZIN... apprestarono loro una serie di risultamenti sperimentali sul movimento dell'acqua nei tubi e nei canali, i quali ebbero già da alcuni degli stessi autori la sanzione della pratica nell'esecuzione di grandiosi lavori; quando in fine rifletteranno quali preziosi materiali alla fisica dei fiumi siano stati aggiunti da LOMBARDINI, da BAUMGARTEN, da DUPUIT, da HUMPHREY, e come questi lavori abbiano mostrato la importanza e l'urgenza di regolare quella parte dell'idraulica che denominasi statistica dei fiumi. Se, dopo ciò, i teorici faranno osservare ai pratici la parte che le matematiche ebbero nell'ottenere quei risultati, e mostreranno loro la potenza dei metodi di interpolazione, quella dei metodi per correggere gli errori delle osservazioni, i sani criterj offerti dal calcolo delle probabilità nelle scienze sperimentali, la scissura non sarà più possibile, la teorica e la pratica si confonderanno.

Queste idee, le quali, come voi sapete, hanno in favore l'autorità del nostro egregio collega LOMBARDINI, erano anco divise dal COLOMBANI; ma benchè se ne trovino traccie in tutti i suoi lavori di idraulica, il modo col quale sono esposte additerebbe piuttosto ad un dubbio che ad una ferma convinzione. Questo è l'appunto che io faccio alla terza edizione del suo manuale, giacchè nei diciott'anni trascorsi fra la prima e la terza edizione, la maggior parte dei lavori succitati avevano dato all'idraulica la sua vera base, fissandone il metodo di ricerca; ed esso metodo doveva, a mio avviso, il COLOMBANI, esporre chiaramente nella seconda parte della sua opera, anzichè arrestarsi ai risultamenti di DUBUAT, di PRONY, di EYTELWEIN, ai quali forse tra breve non è riservata che una importanza storica. Mi si osserverà che il libro del COLOMBANI è un manuale, non un trattato di idraulica; che l'indole di esso ristringe quindi i limiti delle quistioni da trattarsi: io sono lontano dal negar valore a questa osservazione, ed anzi credo essere questa la causa principale della lacuna; ma coloro i quali riconoscono la necessità di un gran numero di forze cospiranti onde raccogliere e coordinare i risultati delle moltissime osservazioni necessarie a darci cognizioni precise ed idee esatte sui fenomeni idraulici, lamenteranno con me che il COLOMBANI, il quale aveva ingegno e studj pari al soggetto, non abbia creduto, in un libro tanto diffuso, di esporre chiaramente i principj di quella scuola idraulica. Nè è da credersi che quella specie di dub-

biezza, la quale potrebbe arguirsi da' suoi scritti *), rivelasse il vero stato dell'animo del COLOMBANI intorno alla bontà di quei principj; la sua parola sicura ebbe anzi molta influenza nel confermarmi la giustezza di quelle idee; ma, sia tolleranza delle opinioni altrui, sia mitezza di carattere o modestia, egli, tenacissimo delle proprie opinioni, difficilmente in pubblico le esponeva in una forma assoluta. Questa apparente contraddizione costituiva d'altra parte una delle belle doti del COLOMBANI, dote pur troppo non comune a molti, e la quale, se in alcuni casi torna a danno della iniziativa individuale, è però sempre accompagnata da molta coscienziosità di giudizio e di azione.

Nella terza parte del Manuale, dedicata all'uso dell'acqua, il COLOMBANI considera dapprima l'acqua come forza motrice, ed in poche pagine descrive le principali ruote idrauliche, e dà le regole per determinare il loro effetto utile, quindi si occupa, in un secondo capitolo, dell'uso dell'acqua nella irrigazione. La vasta coltura del COLOMBANI rivelasi nel grandissimo numero di note a piè di pagina, le quali pongono sotto gli occhi del lettore le fonti originali, e costituiscono una completa ed ordinata bibliografia idraulica. Note in appendice contengono anche ciascuna delle tre edizioni, fra le quali citeremo quella relativa alla legislazione sulle acque, che trovasi nella prima e nella seconda edizione, e quelle sulla livellazione e sulle equazioni del moto permanente, nelle ultime due.

Questo breve riassunto delle principali quistioni trattate nel Manuale di idrodinamica del COLOMBANI è sufficiente a dimostrare l'importanza pratica del medesimo, ed a spiegare il favore col quale venne accolto dai tecnici ed il continuo uso che di esso fanno gli ingegneri specialmente dell'alta Italia. Ma sebbene le nuove edizioni dessero agio all'autore di migliorare il suo lavoro ed introdurvi quelle nuove parti che lo ponessero a livello dei progressi che l'idraulica sperimentale andava facendo, egli affidava anche a pubblicazioni speciali la trattazione più completa di alcuni problemi idraulici; la descrizione cioè delle grandiose *Esperienze eseguite dall'ing.* FRANCIS *a Lowell sulla portata degli stramazzi, eretti lungo l'alveo di un canale* **); la ricerca delle condizioni alle quali dovrebbe soddisfare l'*Edifizio di estrazione del modulo d'acqua prescritto dal progetto di Codice italiano* ***); infine un interessante studio *Sulla altezza del rigurgito prodotto dalle tombe a sifone* †).

L'ultimo di questi lavori, pubblicato sul finire del 1856, basterebbe anche solo a caratterizzare il COLOMBANI. Nella prefazione, esternando la fiducia che i suoi colleghi

*) Devesi però fare eccezione per una nota a piè di pagina, in principio dell'opuscolo sulle esperienze di FRANCIS a Lowell.

**) [Giornale dell'ingegnere-architetto ed agronomo, t. VI (1858), pp. 169-186].

***) [Giornale dell'ingegnere-architetto ed agronomo, t. VIII (1860), pp. 555-573].

†) [Milano, presso la Ditta Stella, 1857, in-8°, p. 54 con due tavole].

di Lombardia avrebbero fatto accoglienza a quell'opuscolo colla indulgenza colla quale avevano accolto gli altri suoi lavori, egli conchiude: « *Io n'ho fiducia; principalmente perchè queste pagine porgeranno a voi, porgeranno agli uomini generosi d'ogni professione, d'ogni opinione, d'ogni stato, l'occasione di un'opera buona, essendo stato destinato il provento del loro spaccio, depurato dalle sole spese di stampa, a soccorrere onorate miserie* ». Sapete voi, colleghi, quali erano quelle onorate miserie? erano quelle della emigrazione lombarda, alla quale le provincie italiane, che oggi chiamiamo antiche, erano state larghe di ogni maniera di conforti e di ajuti; e che il COLOMBANI, emigrato esso pure, tentava soccorrere anche con quella pubblicazione. Ma se questo nobile atto rivela una volta di più la gentilezza d'animo ed il patriottismo del COLOMBANI, il merito scientifico di quel lavoro, che io credo incontestabile, ne fa conoscere viemeglio la finezza dell'ingegno e la vastità delle cognizioni idrauliche. Il problema propostosi dal COLOMBANI è uno di quelli alla cui soluzione i pratici dovrebbero spesso ricorrere, principalmente fra noi, dove la irrigazione è tanto estesa e la rete delle strade tanto fitta: eppure nessuna formula era stata trovata prima di lui per calcolare il rigurgito prodotto nel pelo d'acqua di un canale da una tomba a sifone, a meno che vogliasi applicare ad esso le formole ed i risultati sperimentali pel movimento dell'acqua nei tubi. Il lavoro del COLOMBANI è distinto in due parti; nella prima egli trova le formole generali del moto dell'acqua nelle tombe a sifone, applicando a questo movimento il principio delle forze vive, come già, nello studio dei rigurgiti prodotti da altre cause, avevano fatto PONCELET, CORIOLIS ed altri autori. La formola generale a cui egli arriva dà il valore della differenza di livello del pelo d'acqua a monte od a valle della tomba in funzione delle aree delle sezioni delle varie parti della tomba, della velocità media dell'acqua nella sezione inferiore fra le due fronti, dei salti d'acqua a monte ed a valle, e di varj coefficienti numerici, o già determinati per antecedenti esperienze, o da determinarsi con nuove. La seconda parte contiene appunto la descrizione ed i risultati di esperienze eseguite sopra otto tombe a sifone, la maggior parte appartenenti al cavo Marocco, e la determinazione di quei coefficienti. Non mi fermerò lungamente sulle altre due Memorie citate sopra. Le grandiose esperienze di FRANCIS per determinare la portata degli stramazzi, e la formola relativa dell'ingegnere BOYDEN sono tema, per COLOMBANI, nella prima Memoria, di una minuta analisi, dalla quale scorgesi l'acutezza di uno spirito critico riconosciuto da tutti coloro che ebbero rapporti con lui; mentre il progetto di Codice italiano, il quale definiva il nuovo modulo d'acqua, quel corpo d'acqua che scorga nella costante quantità di cinquanta litri al minuto secondo, gli porse occasione nella seconda Memoria, sulle traccie di BRUNACCI e degli ingegneri PARROCHETTI e POSSENTI, di determinare le condizioni alle quali deve soddisfare l'edifizio estrattore del nuovo modulo e di proporre alcuni regolatori automotori, aventi per iscopo di mantenere costante l'erogazione.

Questa ultima pubblicazione mostra nel COLOMBANI famigliarità colle quistioni di cinematica e di meccanica applicata alle macchine, della quale aveva già date prove in due antecedenti lavori, l'uno pubblicato sin dal 1842 nel Politecnico: *Sulla distribuzione del vapore nelle locomotive, e principalmente sul nuovo sistema di* HAWTHORN *); l'altro stampato negli Atti di questo Corpo scientifico per l'anno 1846, dove trovansi savie *Osservazioni sopra una Memoria* (letta all'Istituto stesso) *del signor dottor* PAOLO BASSI « *Sull'effetto utile delle macchine animate da forze che agiscono e reagiscono contemporaneamente sulle medesime* » **). Mi limito ad accennare appena queste due Memorie, benchè siano pregevoli sotto varj rapporti, e la seconda di esse specialmente indichi una sicurezza di giudizio non comune, in quanto che i progressi della meccanica e della fisica industriale farebbero oggi dipendere quella prima quistione da altri principj e probabilmente impedirebbero fino la trattazione della seconda.

Le notizie che vi esposi sulla vita scientifica del COLOMBANI, sebbene attestino già per sè stesse la sua operosità, pure non è che considerando come quei lavori sieno opera di un uomo assorto nelle cure della famiglia, nelle agitazioni della politica e nelle occupazioni della vita parlamentare, che noi possiamo valutarla. Una grave sciagura domestica, la perdita della moglie, lo colpiva nel 1844, dopo pochi anni di matrimonio; unico conforto al dolore vivissimo che egli provò, fu il dedicarsi con tutte le sue forze all'educazione dei suoi quattro figli, due maschi e due ragazze, e l'allevarli a quei generosi sentimenti di patria e di moralità che lui stesso animavano.

Nei primi giorni del 1848, per sottrarsi alle vessazioni della polizia austriaca, egli dovette di nuovo abbandonare la Lombardia e cercare un rifugio a Tromello nella Lomellina, ov'erano beni della sua famiglia. Ritornato in Lodi subito dopo le giornate di Milano, egli prese parte attivissima a tutte le vicende di quell'epoca, ed incaricato dapprima dal governo provisorio di Lombardia dell'ordinamento e della direzione dell'istruzione tecnica secondaria in Milano, poi nominato commissario regio per la provincia di Lodi, pochi dì prima della battaglia di Custoza, adempiè le difficili incumbenze con intelligente attività e con fermezza. Nell'agosto di quell'anno ricoverossi in Piemonte, e poco dopo prese stabile dimora in Torino, preferendo subire il sequestro dei beni al fare domanda d'amnistia o di perdono. La sua vita politica e le qualità sue di scienziato e di uomo versato nella pratica degli affari furono degnamente apprezzate dal secondo collegio elettorale della città di Lodi, che nominavalo deputato al Parlamento nelle due legislature del 1860 e del 1861, sebbene e l'una e l'altra volta fosse in lui peritanza nell'accettare il grave mandato.

---

*) [Il Politecnico, t. V (1842), pp. 42-67, 148-160].

**) [Giornale dell'I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti e Biblioteca Italiana, t. XIII (1846), pp. 317-327].

Egli, quale deputato, appartenne a quella maggioranza parlamentare, la quale, formatasi nel glorioso periodo di vita italiana durante il ministero CAVOUR, non ebbe e non ha altro programma che di continuare le tradizioni della politica liberale e moderata di quell'illustre uomo di Stato. Gli atti della Camera fanno fede della laboriosità del COLOMBANI. Scelto a commissario degli ufficj per un grandissimo numero di progetti di legge risguardanti quistioni di lavori pubblici e di finanze, lo troviamo relatore di parecchi di essi; nominato membro della commissione del bilancio dal 1861 fino all'anno corrente, fu nel 1864 relatore del bilancio speciale del ministero dei lavori pubblici. La sua parola era sempre ascoltata con molta deferenza dai suoi colleghi, a qualunque partito appartenessero, ed una solenne testimonianza di stima ebbe da essi, allorquando, verso la metà del 1862, credendo egli dover rispondere ad una immeritata diffidenza da parte de' suoi elettori col chiedere alla Camera le sue dimissioni, queste non gli furono accordate.

Ma le continue e gravose occupazioni, le inquietudini e le amarezze della vita politica minavano in questi anni la salute già debole dell'ottimo COLOMBANI. Colto da febbre gastrica nell'ottobre scorso, sembrava avviarsi alla convalescenza, e si disponeva a recarsi a Torino onde dare il suo voto favorevole alla Convenzione del 15 settembre, quando una bronchite lo tolse in brev'ora all'amore dei figli ed alla stima dei suoi concittadini.

La morte rapiva così immaturamente all'Italia ancora uno dei suoi più egregi figli, al nostro Corpo scientifico uno dei suoi più degni socj corrispondenti. Al debito d'amicizia e di stima per lui io avrò soddisfatto, se queste mie poche e disadorne parole avranno ingenerato nel vostro animo la convinzione, che egli onorò le scienze coi suoi lavori, l'Italia colle sue alte qualità politiche, l'umanità colle sue virtù.

23 febbraio 1865.

[Pi.], [Pa].

CXVI.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, volume X (1867), pp. 1-21.

Nella terza delle Note delle quali componesi il mio lavoro *Sulla risolvente di* MALFATTI *per le equazioni del quinto grado* *), ho fatto cenno di una classe di equazioni di grado pari, le quali hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore nella trasformazione delle funzioni ellittiche. Il problema della risoluzione delle equazioni del quinto grado diede origine alle prime ricerche intorno a quelle equazioni, giacchè mentre in due Note pubblicate nel 1858 negli Annali del TORTOLINI **) io faceva dipendere dalla proprietà caratteristica delle equazioni stesse i risultati ottenuti allora dal sig. HERMITE ***) intorno a quel problema, il sig. KRONECKER comunicava all'Accademia francese †) una soluzione diretta del problema, basata sopra una proprietà delle equazioni stesse. Sul finire del 1858, nella mia Nota *Sul metodo di* KRONECKER *per la risoluzione delle equazioni del quinto grado* ††), prendendo sempre per punto di partenza alcune proprietà di quelle equazioni, ampliava le prime ricerche di KRONECKER, stabi-

*) [LXIV: t. II, pp. 51-56].

**) [LII: t. I, pp. 335-341].

***) HERMITE, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 508-515].

†) KRONECKER, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 1150-1152].

††) [CXI: t. III, pp. 177-188].

lendo una classe di risolventi per l'equazione del quinto grado; e finalmente il signor KRONECKER, in una rimarchevole comunicazione sopra i suoi lavori algebrici, fatta all'Accademia delle Scienze di Berlino nel giugno 1861 *), oltre ad interessanti considerazioni sulla soluzione data da lui dell'equazione del quinto grado, prendeva per la prima volta ad esaminare nella loro generalità quella classe di equazioni, ed enunciava alcune importanti proprietà delle medesime.

Lo studio di questa classe di equazioni forma lo scopo della Memoria che presento oggi all'Istituto; esso è talmente vasto che io, ben lungi dal pretendere d'aver esaurito l'argomento, penso anzi che principal merito del mio lavoro sarà l'aver resa sempre più palese l'importanza e l'estensione di quello studio.

1. Sieno x_0, x_1, ... x_n le radici dell'equazione del grado $n+1$

$$f(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_{n+1} = 0 .$$

È noto che una qualunque di quelle radici soddisfa ad $n+1$ equazioni lineari alle derivate parziali del primo ordine della forma

$$\sum_1^{n+1} {}_r\, b_{m,r} \frac{\partial x}{\partial a_r} = x(x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}), \tag{1}$$

nella quale la m può assumere i valori 1, 2, 3, ... $n+1$, ed

$$b_{m,r} = b_{r,m} = \sum_1^{m} {}_s\, (r + m - 2s + 1)\, a_{s-1} a_{r+m-s} \text{ **)}. \tag{2}$$

Supponiamo che i coefficienti a_1, a_2, ... a_{n+1} sieno funzioni delle ν quantità c_1, c_2, ... c_ν; si avranno le ν equazioni

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial x}{\partial a_r} \frac{\partial a_r}{\partial c_s} = \frac{\partial x}{\partial c_s}, \qquad (s = 1, 2, \ldots \nu)$$

da ciascuna delle quali e dalle $n+1$ equazioni (1) eliminando le $\frac{\partial x}{\partial a_1}$, $\frac{\partial x}{\partial a_2}$, ... ,

*) KRONECKER, *Ueber seine algebraischen Arbeiten* [Monatsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861, pp. 609—617].

**) Queste equazioni furono date da me per la prima volta [sotto una diversa forma] nel 1854 nel mio lavoro: *Intorno ad alcune formole per la risoluzione delle equazioni algebriche* [XXIII: t. I, pp. 157-161 (p. 159)]. — Vedi anche la mia monografia: *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie*, ecc. [LIV: t. I, pp. 349-414 (p. 381)].

si ottengono le

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n+1} & x p_0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n+1} & x p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,2} & \dots & b_{n+1,n+1} & x p_n \\ \frac{\partial a_1}{\partial c_s} & \frac{\partial a_2}{\partial c_s} & \dots & \frac{\partial a_{n+1}}{\partial c_s} & \frac{\partial x}{\partial c_s} \end{vmatrix} = 0,$$

dalle quali, indicando con Δ il determinante

$$\sum (\pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{n+1,n+1}),$$

si ha:

$$\Delta \frac{\partial x}{\partial c_s} = x (A_{s,1} p_0 + A_{s,2} p_1 + \cdots + A_{s,n+1} p_n), \tag{3}$$

posto

$$p_m = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

$$A_{s,r} = \frac{\partial a_1}{\partial c_s} k_{r,1} + \frac{\partial a_2}{\partial c_s} k_{r,2} + \cdots + \frac{\partial a_{n+1}}{\partial c_s} k_{r,n+1},$$

$$k_{r,s} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{r,s}}.$$

Si avranno così ν equazioni, ponendo nella (3) $s = 1, 2, 3, \dots \nu$, i secondi membri delle quali saranno polinomi in x, di cui i coefficienti sono funzioni note di $c_1, c_2, \dots c_\nu$.

Se queste ν equazioni si moltiplicano ordinatamente per ν coefficienti indeterminati $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu$, e si sommano, si ottiene la

$$\Delta \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial x}{\partial c_s} = x \left(p_0 \sum_1^\nu {}_s \lambda_s A_{s,1} + p_1 \sum_1^\nu {}_s \lambda_s A_{s,2} + \cdots + p_n \sum_1^\nu {}_s \lambda_s A_{s,n+1} \right),$$

ossia:

$$\Delta \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial x}{\partial c_s} = x (\xi_0 p_0 + \xi_1 p_1 + \cdots + \xi_n p_n), \tag{4}$$

posto

$$\xi_{r-1} = \sum_1^\nu {}_s \lambda_s A_{s,r} = k_{r,1} \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial a_1}{\partial c_s} + k_{r,2} \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial a_2}{\partial c_s} + \cdots + k_{r,n+1} \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial a_{n+1}}{\partial c_s}. \tag{5}$$

Da quest'ultima equazione, ponendo $r = 1, 2, \dots n+1$, se ne ottengono $n+1$,

dalle quali deduconsi le seguenti:

$$\Delta \sum_{1}^{\nu} {}_s \lambda_s \frac{\partial a_r}{\partial c_s} = \xi_0 b_{1,r} + \xi_1 b_{2,r} + \cdots + \xi_n b_{n+1,r}, \quad (r = 1, 2, \ldots n+1). \tag{6}$$

Se quindi supponesi che un numero ν dei coefficienti $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ sia noto indipendentemente dai valori delle indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ (il che, come vedremo in seguito, può aver luogo per la classe di equazioni che consideriamo), queste ultime $n+1$ equazioni ci forniranno i valori delle indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ e delle rimanenti ξ.

2. Sia n un numero primo dispari, e, supposto per brevità $\nu = \frac{n+1}{2}$, sieno $r_1, r_2, \ldots r_{\nu-1}$ i residui quadratici di n, ed $s_1, s_2, \ldots s_{\nu-1}$ i non residui quadratici.

Indicando con $A_0, A_1, \ldots A_{\nu-1}$ ν indeterminate, e con α una radice immaginaria dell'equazione $\alpha^n - 1 = 0$, supponiamo che le $n+1$ radici quadrate delle radici $x_0, x_1, \ldots x_n$ si possano esprimere linearmente in funzione di quelle indeterminate nel modo seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x_0} = A_0 \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}, \quad \sqrt{x_1} = \sum_0^{\nu-1} {}_m A_m, \\ \sqrt{x_2} = \sum_0^{\nu-1} {}_m \alpha^{r_m} A_m, \quad \ldots, \quad \sqrt{x_n} = \sum_0^{\nu-1} {}_m \alpha^{(n-1) r_m} A_m, \end{array} \right. \tag{7}$$

nelle quali $r_0 = 0$. Evidentemente questa proprietà delle $n+1$ radici quadrate delle radici $x_0, x_1, \ldots x_n$ equivale al dire che le medesime sono legate da ν relazioni lineari. Queste relazioni, le quali si deducono facilmente dalle superiori, se $\frac{n-1}{2}$ è pari, sono le seguenti:

$$\sum_1^n {}_m \sqrt{x_m} = \sqrt{n x_0}, \quad \sum_1^n {}_m \alpha^{(m-1)s} \sqrt{x_m} = 0, \tag{8}$$

essendo s uno qualsivoglia dei non residui quadratici di n; e se $\frac{n-1}{2}$ è dispari, sono le

$$\sum_1^n {}_m \sqrt{x_m} = -\sqrt{-n x_0}, \quad \sum_1^n {}_m \alpha^{(m-1)r} \sqrt{x_m} = 0, \tag{9}$$

nella seconda delle quali r è uno qualunque dei residui quadratici di n. I coefficienti dell'equazione $f(x) = 0$ saranno evidentemente funzioni omogenee delle $A_0, A_1, \ldots A_{\nu-1}$

o funzioni di ν funzioni $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ delle indeterminate stesse. Per esempio, avendosi dalle (7) per le radici di quella equazione le espressioni

$$x_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n A_0^2,$$
$$x_1 = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1},$$
$$x_2 = P_0 + \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \cdots + \alpha^{n-1} P_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nelle quali $P_0, P_1, \ldots$ indicano funzioni di secondo grado delle $A_0, A_1, \ldots$, ed i valori di $x_3, x_4, \ldots$ si deducono da quello di x_2 cambiando α in $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$; ne segue che, se $\frac{n-1}{2}$ è pari, si ha:

$$\sum_0^n x_m = n(A_0^2 + P_0) = 2n(A_0^2 + A_1 A_{\nu-1} + A_2 A_{\nu-2} + \cdots + A_{\frac{\nu-1}{2}} A_{\frac{\nu+1}{2}}),$$

e se $\frac{n-1}{2}$ è dispari:

$$\sum_0^n x_m = n(-A_0^2 + P_0) = n(-A_0^2 + A_0^2) = 0;$$

perciò, posto

$$c_1 = A_0^2 + A_1 A_{\nu-1} + \cdots + A_{\frac{\nu-1}{2}} A_{\frac{\nu+1}{2}},$$

si ottiene

per $\frac{n-1}{2}$ pari : $a_1 = -2nc_1$; e per $\frac{n-1}{2}$ dispari : $a_1 = 0$.

3. La espressione scritta sopra pel quadrato di $\sqrt{x_2}$, dovendo contenere nel secondo membro tutte le potenze di α, può anche porsi sotto la forma

$$x_2 = P_0 + \sum_1^{\nu-1} \alpha^{rm} P_m + \sum_1^{\nu-1} \alpha^{sm} Q_m,$$

ed analogamente per le $x_3, x_4, \ldots$; quindi dal confronto di queste espressioni colle (7) deducesi evidentemente che le relazioni lineari (8) o (9) esistenti fra le radici quadrate delle $x_0, x_1, x_2, \ldots$ non ponno sussistere per qualunque altra potenza pari o dispari delle radici quadrate medesime.

Ciò posto, indicando con $\sqrt{X}$ il prodotto di $\sqrt{x}$ per una funzione razionale intiera $\varphi(x)$, la quale contenga un certo numero di coefficienti indeterminati, moltiplicati

per potenze di x differenti fra loro e comprese fra la prima e la n^{ima}, ponendo cioè

$$\sqrt{X} = \varphi(x)\sqrt{x};$$

affinchè per $\sqrt{X_0}$, $\sqrt{X_1}$, ... $\sqrt{X_n}$, ossia pei valori di $\varphi(x)\sqrt{x}$ corrispondenti ad $x = x_0, x_1, \dots x_n$, sussistano equazioni analoghe alle (8) od alle (9), dovrà il numero dei coefficienti indeterminati contenuti in $\varphi(x)$ non essere minore di ν, ed il numero dei termini del polinomio $\varphi(x)$ essere maggiore di ν.

Infatti, supponendo

$$\varphi(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_\nu x^\nu,$$

ed indicando con μ un numero intiero non maggiore di n, se facciamo per brevità

$$\sum_1^n{}_m\, x_m^\mu \sqrt{x_m} = C_{0,\mu}, \quad \sum_1^n{}_m\, \alpha^{(m-1)r_1} x_m^\mu \sqrt{x_m} = C_{1,\mu}, \quad \dots \quad \sum_1^n{}_m\, \alpha^{(m-1)r_{\nu-1}} x_m^\mu \sqrt{x_m} = C_{\nu-1,\mu},$$

si avranno le

$$\sum_1^n{}_m \sqrt{X_m} = b_1 C_{0,1} + b_2 C_{0,2} + \cdots + b_\nu C_{0,\nu},$$

$$\sum_1^n{}_m\, \alpha^{(m-1)r_1} \sqrt{X_m} = b_1 C_{1,1} + b_2 C_{1,2} + \cdots + b_\nu C_{1,\nu},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_1^n{}_m\, \alpha^{(m-1)r_{\nu-1}} \sqrt{X_m} = b_1 C_{\nu-1,1} + b_2 C_{\nu-1,2} + \cdots + b_\nu C_{\nu-1,\nu};$$

e supponendo che le espressioni $\sqrt{X_m}$ soddisfacciano a ν equazioni analoghe alle (9), si avranno ν equazioni, per la sussistenza delle quali dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} C_{0,1} + x_0\sqrt{-n x_0} & C_{0,2} + x_0^2\sqrt{-n x_0} & \dots & C_{0,\nu} + x_0^\nu\sqrt{-n x_0} \\ C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{\nu-1,1} & C_{\nu-1,2} & \dots & C_{\nu-1,\nu} \end{vmatrix} = 0;$$

ma, siccome per mezzo di facili trasformazioni dimostrasi non poter essere nullo in generale il determinante superiore, ne risulta che la funzione $\varphi(x)$ dovrà contenere un numero di termini maggiore di ν, come sopra enunciammo.

Quindi la funzione $\varphi(x)$ potrà essere dei gradi $n, n-1, n-2, \dots, \frac{n+3}{2} = \nu + 1$;

e si potranno ottenere $\frac{n-1}{2}$ funzioni $\sqrt{X}$, le quali soddisfanno a relazioni analoghe alle (8) od alle (9). Abbiamo così il seguente

TEOREMA I. — *Se le radici quadrate delle radici di una equazione del grado $n+1$ soddisfanno a ν equazioni della forma* (8) *o* (9), *si ponno determinare altre $\frac{n-1}{2}$ funzioni razionali intiere di $\sqrt{x}$, linearmente indipendenti tra loro, le quali soddisfanno ad equazioni della stessa forma. Tutte le altre funzioni razionali intiere di $\sqrt{x}$, per le quali si verifica la stessa proprietà, sono funzioni lineari di quelle prime ν funzioni di $\sqrt{x}$.*

Ora, se le relazioni (8) e (9) si derivano ordinatamente rispetto a $c_1, c_2, \ldots c_\nu$, si ottengono altrettante relazioni della stessa forma, nelle quali in luogo delle $\sqrt{x_0}$, $\sqrt{x_1}, \ldots$ sono poste le loro derivate rispetto alle $c_1, c_2, \ldots$. Quindi le derivate prime, seconde, ... di $\sqrt{x}$ rispetto alle quantità $c_1, c_2, \ldots$ saranno funzioni lineari delle ν funzioni indicate sopra.

Indicando con

$$(10)\qquad \varphi_0(\sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \varphi_1(\sqrt{x}), \quad \varphi_2(\sqrt{x}), \ldots \varphi_{\nu-1}(\sqrt{x})$$

quelle ν funzioni, è evidente che, se le espressioni

$$\frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_1}, \quad \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_2}, \ldots \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_\nu}$$

sono funzioni lineari delle medesime, saranno reciprocamente le funzioni stesse funzioni lineari di quelle ν derivate, cioè si potranno determinare ν^2 coefficienti $\lambda_s^{(r)}$ funzioni di $c_1, c_2, \ldots c_\nu$, i quali rendano

$$(11)\quad \sum_1^\nu{}_s \lambda_s \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = \varphi_0(\sqrt{x}), \quad \sum_1^\nu{}_s \lambda'_s \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = \varphi_1(\sqrt{x}), \ldots \sum_1^\nu{}_s \lambda_s^{(\nu-1)} \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = \varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}).$$

4. Rammentando l'equazione (4) stabilita al n° 1, o la equivalente

$$(12)\qquad 2\Delta \sum_1^\nu{}_s \lambda_s \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = (\xi_0 p_0 + \xi_1 p_1 + \cdots + \xi_n p_n)\sqrt{x},$$

è evidente, dal confronto di essa colle (11), che il secondo membro della medesima potrà, per una opportuna determinazione dei coefficienti $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$, coincidere con una qualsivoglia delle funzioni (10).

Ma dallo stesso n° 1 si ha che, supponendo noti i valori di un numero ν di quei coefficienti, i valori degli altri, come quelli dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$, si deducono

dalla risoluzione di $n+1$ equazioni lineari (6); abbiamo quindi un metodo generale per la ricerca delle funzioni (10) e delle loro espressioni in funzione lineare delle derivate prime di $\sqrt{x}$ rispetto alle $c_1, c_2, \ldots c_\nu$.

Infatti, supponiamo

$$\varphi_1(\sqrt{x}) = (p_{\nu+1} + b_1 p_\nu + b_2 p_{\nu-1} + \cdots + b_\nu p_1)\sqrt{x}, \tag{13}$$

essendo $b_1, b_2, \ldots b_\nu$ coefficienti indeterminati.

Evidentemente questo polinomio coinciderà col secondo membro della (12), se

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_{\nu+1} = 1, \quad \xi_{\nu+2} = 0, \quad \ldots, \quad \xi_n = 0,$$

le quali appunto determinano un numero ν fra i coefficienti $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$; e dalla (6) si avranno le $n+1$ equazioni

$$\Delta \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial a_r}{\partial c_s} - \xi_1 b_{2,r} - \xi_2 b_{3,r} - \cdots - \xi_\nu b_{\nu+1,r} = b_{\nu+2,r}, \tag{14}$$

dalle quali si dedurranno i valori delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$; $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\nu$.

Analogamente, i valori delle funzioni $\varphi_2(\sqrt{x}), \varphi_3(\sqrt{x}), \ldots \varphi_{\nu-1}(\sqrt{x})$ si potranno ottenere supponendo nella (12) ordinatamente:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_0 = 0, \quad \xi_{\nu+1} = 0, \quad \xi_{\nu+2} = 1, \quad \xi_{\nu+3} = 0, \quad \ldots \quad \xi_n = 0, \\ \xi_0 = 0, \quad \xi_{\nu+1} = 0, \quad \xi_{\nu+2} = 0, \quad \xi_{\nu+3} = 1, \quad \ldots \quad \xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_0 = 0, \quad \xi_{\nu+1} = 0, \quad \xi_{\nu+2} = 0, \quad \xi_{\nu+3} = 0, \quad \ldots \quad \xi_n = 1; \end{array}\right. \tag{15}$$

e deducendo i valori delle altre indeterminate per mezzo delle equazioni (6) del n° 1.

Da ultimo l'equazione (12), nella quale pongasi $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$, diventa:

$$2\Delta \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = \sqrt{x}, \tag{16}$$

e le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ devono per le (6) soddisfare alle $n+1$ equazioni:

$$\Delta \sum_1^\nu {}_s \lambda_s \frac{\partial a_r}{\partial c_s} = b_{1,r} = r a_r. \tag{17}$$

Ora le $a_1, a_2, \ldots$ essendo di grado 2^{do}, 4^{to} $\ldots$ rispetto alle $A_0, A_1, \ldots$, si avrà:

$$\sum_0^{\nu-1} {}_m A_m \frac{\partial a_r}{\partial A_m} = 2 r a_r;$$

ma:

$$\frac{\partial a_r}{\partial A_m} = \sum_1^{\nu} \frac{\partial a_r}{\partial c_s} \frac{\partial c_s}{\partial A_m};$$

dunque, sostituendo:

$$\sum_1^{\nu} \frac{\partial a_r}{\partial c_s} \sum_0^{\nu-1} A_m \frac{\partial c_s}{\partial A_m} = 2 r a_r,$$

e dal confronto di questa colla (17), si avrà:

$$2 \Delta \lambda_s = \sum_0^{\nu-1} A_m \frac{\partial c_s}{\partial A_m};$$

e siccome le $c_1, c_2, \ldots$ devono essere funzioni omogenee delle $A_0, A_1, \ldots$, se indichiamo con $2g_s$ il grado di c_s, si avrà:

$$\Delta \lambda_s = g_s c_s,$$

il qual valore, sostituito nella (16), darà l'equazione generale

$$(18) \qquad 2 \sum_1^{\nu} g_s c_s \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c_s} = \sqrt{x}.$$

5. Prima di procedere oltre in queste ricerche generali, facciamoci a considerare alcuni casi particolari, principalmente allo scopo di mostrare il facile uso delle formole trovate nei n[i] antecedenti.

Caso I: $n = 3$. Le quattro radici x_0, x_1, x_2, x_3 sono legate dalle due relazioni lineari:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -\sqrt{-3x_0}, \qquad \sqrt{x_1} + \alpha\sqrt{x_2} + \alpha^2\sqrt{x_3} = 0.$$

Posto $c_1 = a$, $c_2 = b$, si hanno le

$$a = A_0(A_0^3 + A_1^3), \qquad b = 8A_0^6 - 20A_0^3A_1^3 - A_1^6,$$

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -6a, \qquad a_3 = b, \qquad a_4 = -3a^2,$$

cioè l'equazione del quarto grado, di cui le radici sono le x_0, x_1, x_2, x_3, è la

$$(19) \qquad x^4 - 6ax^2 + bx - 3a^2 = 0.$$

L'equazione (18) dà in questo caso:

$$(20) \qquad 2\left(2a\frac{\partial \sqrt{x}}{\partial a} + 3b\frac{\partial \sqrt{x}}{\partial b}\right) = \sqrt{x},$$

e la (12):

$$2\Delta\left(\lambda_1\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}\right)=(\xi_1 p_1+\xi_2 p_2+p_3)\sqrt{x},$$

essendo λ_1, λ_2; ξ_1, ξ_2 dedotte dalle quattro equazioni analoghe alle (14), cioè:

$$\Delta\left(\lambda_1\frac{\partial a_r}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial a_r}{\partial b}\right)-\xi_1 b_{2,r}-\xi_2 b_{3,r}=b_{4,r}$$

per $r=1, 2, 3, 4$. Rammentando il valore di $b_{m,r}$ dato dalla formola (2) del n° 1, si formano facilmente queste quattro equazioni, e sono:

$$4a\xi_1-b\xi_2=-4a^2,\qquad 2\Delta\lambda_1+b\xi_1-4a^2\xi_2=0,$$

$$\Delta\lambda_2+12a^2\xi_1+6ab\xi_2=36a^3,\qquad 2a\Delta\lambda_1+12a^3\xi_2=a^2 b,$$

dalle quali si hanno le

$$\xi_2=0,\qquad \xi_1=-a,\qquad \Delta\lambda_1=\tfrac{1}{2}ab,\qquad \Delta\lambda_2=48a^3,$$

quindi la seconda equazione sarà:

$$ab\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+96a^3\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}=(p_3-ap_1)\sqrt{x},$$

ossia:

$$ab\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+96a^3\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}=(x^3-7ax+b)\sqrt{x}, \tag{21}$$

cioè le due funzioni cercate $\varphi_0(\sqrt{x})$, $\varphi_1(\sqrt{x})$ sono, nel caso di $n=3$, le due seguenti:

$$\varphi_0(\sqrt{x})=\sqrt{x},\qquad \varphi_1(\sqrt{x})=(x^3-7ax+b)\sqrt{x}=\varphi(\sqrt{x})\ ^{*)}.$$

Dalle equazioni (20), (21) si deducono le

$$\left\{\begin{aligned} a(64a^3-b^2)\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}&=16a^3\sqrt{x}-b\varphi(\sqrt{x}),\\ 6(64a^3-b^2)\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}&=-b\sqrt{x}+4\varphi(\sqrt{x}). \end{aligned}\right. \tag{22}$$

*) Vedi la mia Nota: *Sur une classe d'équations du quatrième degré* [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVII (1863), pp. 106-108].

CASO II: $n=5$. Le sei radici $x_0, x_1, \ldots x_5$ sono legate dalle tre relazioni lineari:

$$(23)\qquad \begin{cases} \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}+\sqrt{x_5}=\sqrt{5\,x_0}\,, \\ \sqrt{x_1}+\alpha^2\sqrt{x_2}+\alpha^4\sqrt{x_3}+\alpha\sqrt{x_4}+\alpha^3\sqrt{x_5}=0\,, \\ \sqrt{x_1}+\alpha^3\sqrt{x_2}+\alpha\sqrt{x_3}+\alpha^4\sqrt{x_4}+\alpha^2\sqrt{x_5}=0\,, \end{cases}$$

e posto $c_1=a$, $c_2=b$, $c_3=c$, le a, b, c sono funzioni omogenee delle A_0, A_1, A_2 rispettivamente dei gradi secondo, sesto e decimo, e si hanno le

$$a_1=-10\,a,\quad a_2=35\,a^2,\quad a_3=-10(6\,a^3-b),\quad a_4=5\,a(11\,a^3-6\,b),$$
$$a_5=-26\,a^5+30\,a^2 b-4\,c,\qquad a_6=5\,(a^3-b)^2,$$

cioè la equazione del sesto grado, di cui le radici sono le $x_0, x_1, \ldots x_5$, è la

$$(24)\quad (x-a)^6-4\,a\,(x-a)^5+10\,b\,(x-a)^3-4\,c\,(x-a)+5\,b^2-4\,a\,c=0.$$

L'equazione (18) dà in questo caso:

$$(25)\qquad 2\left(a\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+3\,b\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}+5\,c\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\right)=\sqrt{x}\,;$$

e dalle (12) si avranno le due seguenti:

$$(26)\qquad \begin{cases} 2\,\Delta\left(\lambda_1\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}+\lambda_3\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\right)=(p_4+\xi_3 p_3+\xi_2 p_2+\xi_1 p_1)\sqrt{x}\,, \\ 2\,\Delta\left(\lambda'_1\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+\lambda'_2\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}+\lambda'_3\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\right)=(p_5+\xi'_3 p_3+\xi'_2 p_2+\xi'_1 p_1)\sqrt{x}\,, \end{cases}$$

per la prima delle quali i valori delle indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono dati dalle sei equazioni che si ottengono ponendo $r=1, 2, \ldots 6$ nella

$$(27)\qquad \Delta\left(\lambda_1\frac{\partial a_r}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial a_r}{\partial b}+\lambda_3\frac{\partial a_r}{\partial c}\right)-\xi_1 h_{2,r}-\xi_2 h_{3,r}-\xi_3 h_{4,r}=h_{5,r}\,,$$

ed i valori delle $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ da altre sei equazioni, le quali si ottengono dalle superiori, ponendo nel secondo membro $h_{6,r}$ in luogo di $h_{5,r}$.

Le due equazioni che si deducono dalla (27), ponendo $r=1, 2$, sono le

$$\Delta\lambda_1+7\,a^2\xi_1-3\,(6\,a^3-b)\xi_2+2\,a(11\,a^3-6\,b)\xi_3=13\,a^5-15\,a^2 b+2\,c,$$
$$7\,a\Delta\lambda_1+(53\,a^3-3\,b)\xi_1-2\,a(71\,a^3-16\,b)\xi_2+(178\,a^5-105\,a^2 b+2\,c)\xi_3$$
$$=107\,a^6-126\,a^3 b+3\,b^2+16\,a\,c\,;$$

da queste, eliminando λ_1, si ottiene la

$$(4a^3-3b)\xi_1-a(16a^3-11b)\xi_2+(24a^5-21a^2b+2c)\xi_3=16a^6-21a^3b+3b^2+2ac,$$

la quale è sufficiente a determinare i valori di ξ_1, ξ_2, ξ_3. Infatti, indicando con p, q, r, s dei coefficienti numerici, è evidente per la prima delle (26) dover essere

$$\xi_3=pa, \qquad \xi_2=qa^2, \qquad \xi_1=ra^3+sb;$$

ora, sostituendo questi valori nella superiore, ed eguagliando i coefficienti di a^6, a^3b,..., si ottengono le quattro equazioni

$$r-4q+6p=4, \qquad 4s-3r+11q-21p=-21, \qquad -3s=3, \qquad 2p=2,$$

dalle quali:

$$p=1, \qquad q=2, \qquad r=6, \qquad s=-1,$$

e quindi:

$$2\Delta\left(\lambda_1\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial b}+\lambda_3\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\right)=[p_4+ap_3+2a^2p_2+(6a^3-b)p_1]\sqrt{x}.$$

Inoltre, la prima delle superiori dà per questi valori di ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\Delta\lambda_1=-15a^5-2a^2b+2c,$$

e siccome, ponendo $r=6$ nella (27), si ha:

$$\Delta(3a^2\lambda_1-\lambda_2)+(a^3-b)[25a\xi_1-70a^2\xi_2+15(6a^3-b)\xi_3]=5a(a^3-b)(11a^3-6b),$$

si avrà anche:

$$\Delta\lambda_2=-a(61a^3b-10b^2-6ac);$$

e finalmente dalla equazione (27), nella quale pongasi $r=5$, si ha:

$$\Delta\lambda_3=5(2a^3b^2-6b^3-23a^4c+12abc).$$

Affatto analogamente si determineranno i valori delle quantità indeterminate contenute nella seconda delle equazioni (26), e si avranno le

$$\xi'_3=0, \qquad \xi'_2=-(a^3-b), \qquad \xi'_1=-5a(a^3-b),$$

$$\Delta\lambda'_1=2(a^3-b)(7a^3+3b), \qquad \Delta\lambda'_2=2(a^3-b)(29a^2b+c), \qquad \Delta\lambda'_3=10a(a^3-b)(11ac-b^2).$$

Conchiudendo si ha che, pel caso di $n=5$, le tre funzioni richieste sono le

$$(28) \qquad \begin{cases} \sqrt{x}, \quad \varphi(\sqrt{x})=[p_4+ap_3+2a^2p_2+(6a^3-b)p_1]\sqrt{x}, \\ \psi(\sqrt{x})=[p_5-(a^3-b)p_2-5a(a^3-b)p_1]\sqrt{x}, \end{cases}$$

esprimibili anche sotto la forma seguente:

$$
(29)\quad \begin{cases}
\sqrt{x} = 2\left(a\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial a} + 3b\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial b} + 5c\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\right), \\
\varphi(\sqrt{x}) = 2\Big[(2c - 15a^5 - 2a^2 b)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial a} + a(6ac - 61a^3 b + 10b^2)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial b} \\
\qquad\qquad + 5(2a^3 b^2 - 6b^3 - 23a^4 c + 12abc)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\Big], \\
\psi(\sqrt{x}) = 4(a^3 - b)\Big[(7a^3 + 3b)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial a} + (29a^2 b + c)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial b} + 5a(11ac - b^2)\dfrac{\partial\sqrt{x}}{\partial c}\Big].
\end{cases}
$$

6. Determinate nel modo suesposto le $\frac{n+1}{2}$ funzioni razionali intiere di $\sqrt{x}$, linearmente indipendenti, le quali soddisfanno alle relazioni (8) o (9), consideriamo ora l'equazione del grado $n+1$, di cui le radici sono i valori di una funzione lineare di quelle funzioni, valori corrispondenti alle radici dell'equazione $f(x) = 0$. Ponendo cioè

$$
(30)\qquad \sqrt{y} = l_0\varphi_0(\sqrt{x}) + l_1\varphi_1(\sqrt{x}) + \cdots + l_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}),
$$

nella quale le $l_0, l_1, \ldots$ sono coefficienti arbitrari, consideriamo la equazione, le radici della quale sono i valori $y_0, y_1, \ldots$ della y corrispondenti ad $x = x_0, x_1, \ldots$. È evidente, per quanto si è dimostrato al n° 4, che il valore di $\sqrt{y}$ si potrà porre sotto la forma

$$
(31)\qquad \sqrt{y} = (m_0 p_0 + m_1 p_1 + m_2 p_2 + \cdots + m_n p_n)\sqrt{x},
$$

nella quale $m_0, m_1, \ldots$ sono funzioni lineari delle $l_0, l_1, \ldots$ e delle $\xi_0, \xi_1, \ldots$.

Ora si dimostra facilmente che per le funzioni p_r sussiste la proprietà scritta nell'equazione seguente

$$
(32)\quad \begin{cases}
x p_r p_s = a_s p_{r+1} + a_{s-1} p_{r+2} + a_{s-2} p_{r+3} + \cdots + a_1 p_{r+s} + p_{r+s+1} \\
\qquad - (a_{r+1} p_s + a_{r+2} p_{s-1} + a_{r+3} p_{s-2} + \cdots + a_{r+s} p_1 + a_{r+s+1} p_0),
\end{cases}
$$

o nella

$$
\begin{aligned}
x p_r p_s = {} & a_r p_{s+1} + a_{r-1} p_{s+2} + \cdots + a_1 p_{s+r} + p_{s+r+1} \\
& - (a_{s+1} p_r + a_{s+2} p_{r-1} + \cdots + a_{s+r} p_1 + a_{s+r+1} p_0);
\end{aligned}
$$

quindi, essendo per la (31)

$$
y = x \sum_0^n{}_r \sum_0^n{}_s m_r m_s p_r p_s,
$$

si avrà, sostituendo, che y sarà una funzione lineare delle $p_0, p_1, \ldots$; ossia:

$$y = tp_0 + t_0 p_1 + t_1 p_2 + \cdots + t_{n-1} p_n, \tag{33}$$

nella quale le $t_0, t_1, \ldots$ sono funzioni quadratiche delle $m_0, m_1, \ldots$, e perciò anche delle $l_0, l_1, \ldots$.

La ricerca dell'equazione che ha per radici le $y_0, y_1, \ldots y_n$ equivale dunque a quella di trasformare l'equazione $f(x) = 0$, mediante la sostituzione (33), cioè mediante quella sostituzione, che l'HERMITE opportunamente propose fosse sostituita all'antica di TSCHIRNHAUS, e della quale dimostrò le proprietà caratteristiche*). Da questi lavori risulta che, se determinasi la quantità indicata con t in modo che il coefficiente del secondo termine nella trasformata in y sia eguale a zero, i coefficienti di tutti gli altri termini sono invarianti comuni alla funzione $f(x)$ ed alla

$$(t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1})(1, -x)^{n-1}.$$

Ora la trasformata in y suddetta avrà, per la proprietà delle sue radici, la stessa forma della equazione $f(x) = 0$, cioè i coefficienti di essa trasformata saranno funzioni di ν quantità $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$, come i coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ lo sono delle $c_1, c_2, \ldots c_\nu$. Quindi il coefficiente del secondo termine della trasformata sarà, per quanto si è dimostrato al n° 2, eguale a zero, se $\frac{n-1}{2}$ è dispari, ed eguale a $-2n\gamma_1$, se $\frac{n-1}{2}$ è pari; e siccome dalla (33) si ha:

$$\sum y = (n+1)t + na_1 t_0 + (n-1)a_2 t_1 + \cdots + a_n t_{n-1},$$

così si avrà, per $\frac{n-1}{2}$ dispari:

$$(n+1)t + na_1 t_0 + (n-1)a_2 t_1 + \cdots + a_n t_{n-1} = 0,$$

e per $\frac{n-1}{2}$ pari:

$$(n+1)t + na_1 t_0 + (n-1)a_2 t_1 + \cdots + a_n t_{n-1} = 2n\gamma_1.$$

Rammentando dunque la proprietà enunciata sopra per questa trasformazione, si avrà il seguente

---

*) HERMITE, *Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XLVI (1858), pp. 961-967]. Vedi inoltre la mia Nota dello stesso anno: *Sulla trasformazione delle equazioni algebriche* [CX: t. III, pp. 171-175], e due Note di CAYLEY, *Note sur la transformation de* TSCHIRNHAUSEN [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LVIII (1861), pp. 259-262, 263-269].

Teorema II. — *La equazione dell'$(n+1)^{mo}$ grado, di cui le radici sono i valori delle $y_0, y_1, \dots$ corrispondenti ai valori $x_0, x_1, \dots$ di x dati dalla (33), ha la proprietà che, se $\frac{n-1}{2}$ è dispari, il coefficiente del secondo termine è nullo, e quindi tutti gli altri coefficienti sono invarianti comuni alla funzione $f(x)$ ed alla*

$$(t_0, t_1, \dots t_{n-1})(1, -x)^{n-1};$$

e se $\frac{n-1}{2}$ è pari, il coefficiente del secondo termine potrà annullarsi per una opportuna determinazione delle quantità indeterminate $l_0, l_1, \dots$, ed anche in questo caso avrà luogo per gli altri coefficienti la proprietà suddetta.

7. In questo numero faremo una breve digressione relativamente ad alcune proprietà, non peranco avvertite, del metodo di trasformazione di Hermite, le quali troveranno una opportuna applicazione nelle ricerche che abbiamo specialmente di mira.

Il prodotto di due funzioni p_r essendo esprimibile linearmente mediante le funzioni medesime, per mezzo delle relazioni

$$\begin{aligned} p_r p_s &= a_s p_r + a_{s-1} p_{r+1} + a_{s-2} p_{r+2} + \cdots + a_1 p_{r+s-1} + p_{r+s} \\ &\quad - (a_{r+1} p_{s-1} + a_{r+2} p_{s-2} + \cdots + a_{r+s-1} p_1 + a_{r+s}) \\ &= a_r p_s + a_{r-1} p_{s+1} + a_{r-2} p_{s+2} + \cdots + a_1 p_{s+r-1} + p_{s+r} \\ &\quad - (a_{s+1} p_{r-1} + a_{s+2} p_{r-2} + \cdots + a_{s+r-1} p_1 + a_{s+r}), \end{aligned}$$

è evidente che, posto

$$y = t + t_0 p_1 + t_1 p_2 + t_2 p_3 + \cdots + t_{n-1} p_n,$$

si hanno le

$$\begin{aligned} y^2 &= t' + t'_0 p_1 + t'_1 p_2 + t'_2 p_3 + \cdots + t'_{n-1} p_n, \\ y^3 &= t'' + t''_0 p_1 + t''_1 p_2 + t''_2 p_3 + \cdots + t''_{n-1} p_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

nelle quali le $t', t'_0, \dots$ sono funzioni quadratiche delle $t, t_0, \dots$; le $t'', t''_0, \dots$ funzioni cubiche, e così via. Da queste relazioni, indicando con $S_1, S_2, \dots$ le somme delle potenze delle radici della trasformata, si deducono le

$$(34) \quad \begin{cases} S_1 = (n+1)t + n a_1 t_0 + (n-1) a_2 t_1 + \cdots + a_n t_{n-1}, \\ S_2 = (n+1)t' + n a_1 t'_0 + (n-1) a_2 t'_1 + \cdots + a_n t'_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La prima di esse, supponendo $S_1 = 0$, darà il valore di t, il quale ridurrà S_2 eguale ad una funzione quadratica delle $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}$. Se supponiamo anche $S_2 = 0$, la seconda delle equazioni (34) darà il valore di t', cioè la espressione S_3 diventerà funzione delle $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}; t'_0, t'_1, \ldots t'_{n-1}$, e così di seguito. Quindi, supponendo $S_1 = 0$, si ha:

$$S_2 = \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s A_{r,s} t_r t_s;$$

se $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, si ha:

$$S_3 = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s A_{r,s}(t_r t'_s + t_s t'_r), \qquad S_4 = \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s A_{r,s} t'_r t'_s;$$

se $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, si hanno le

$$S_4 = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s A_{r,s}(t_r t''_s + t_s t''_r), \qquad S_5 = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1}{}_r \sum_0^{n-1}{}_s A_{r,s}(t'_r t''_s + t'_s t''_r),$$

e così via. Analoga proprietà ha luogo pei valori delle $t'_0, t'_1, \ldots; t''_0, t''_1, \ldots$ in funzione delle $t_0, t_1, \ldots$. Per esempio, la trasformazione di Jerrard per l'equazione del quinto grado, indicando con f, g, h, k quattro funzioni lineari delle t_0, t_1, t_2, t_3, e rappresentando la trasformata colla

$$y^5 + \alpha y + \beta = 0,$$

risulterebbe dalle quattro relazioni:

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = 0,$$

$$ff' + gg' + hh' + kk' = 0,$$

$$ff'' + gg'' + hh'' + kk'' = f'^2 + g'^2 + h'^2 + k'^2 = m\alpha,$$

$$f'f'' + g'g'' + h'h'' + k'k'' = n\beta,$$

nelle quali m, n sono coefficienti numerici facilmente determinabili, e le $f', g', \ldots; f'', g'', \ldots$ sono i valori delle $f, g, \ldots$, nelle quali alle $t_0, t_1, \ldots$ si sostituiscano le $t'_0, t'_1, \ldots; t''_0, t''_1, \ldots$.

8. Applichiamo questi risultati alle due equazioni particolari già considerate, per le quali $n = 3$, $n = 5$. Supponendo

$$\sqrt{y} = l_0 \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial a} + l_1 \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial b} = (m_0 + m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3)\sqrt{x},$$

si hanno le

$$m_0 = \frac{1}{\delta}(96a^3 l_0 - a b l_1), \quad m_1 = \frac{1}{\delta}(6 a b l_0 - 4 a^2 l_1), \quad m_2 = 0, \quad m_3 = -\frac{1}{a} m_1,$$

$$t = 6 a m_0 m_1 - b m_1^2, \qquad t_0 = m_0^2, \qquad t_1 = 2 m_0 m_1, \qquad t_2 = 4 m_1^2;$$

i quali valori dànno la

$$4t - 12 a t_1 + b t_2 = 0,$$

cioè il coefficiente del secondo termine della trasformata in y è eguale a zero, come era noto a priori. La forma dei valori delle t_0, t_1, t_2 dinota già che i coefficienti degli altri termini sono covarianti della forma biquadratica

$$x^4 - 6 a x^2 y^2 + b x y^3 - 3 a^2 y^4,$$

nei quali pongansi m_0, $2 m_1$ in luogo di x e di y; cioè saranno i covarianti irreducibili di quarto e di sesto grado di quella forma. Ma possiamo anche calcolare facilmente i valori di quei coefficienti col metodo esposto nel n° precedente; il che tralasciamo di fare in questo caso, proponendoci l'analoga calcolazione per $n = 5$ *).

Nel caso di $n = 5$ si osservi dapprima che la equazione (24), di cui le radici sono le $x_0, x_1, \ldots x_5$, ponendo

$$x - a = z,$$

può scriversi:

$$z^6 - 4 a z^5 + 10 b z^3 - 4 c z + 5 b^2 - 4 a c = 0;$$

inoltre, indicando con $q_1, q_2, \ldots$ i polinomi

$$q_1 = z - 4a, \qquad q_2 = z^2 - 4 a z, \qquad q_3 = z^3 - 4 a z^2 + 10 b, \qquad \ldots$$

si hanno le

$$p_1 = q_1 - 5a, \quad p_2 = q_2 - 4 a q_1 + 10 a^2, \quad p_3 = q_3 - 3 a q_2 + 6 a^2 q_1 - 10 a^3,$$

$$p_4 = q_4 - 2 a q_3 + 3 a^2 q_2 - 4 a^3 q_1 + 5 a^4, \quad p_5 = q_5 - a q_4 + a^2 q_3 - a^3 q_2 + a^4 q_1 - a^5,$$

per le quali:

$$(35) \quad y = t + t_0 p_1 + t_1 p_2 + t_2 p_3 + t_3 p_4 + t_4 p_5 = v + v_0 q_1 + v_1 q_2 + v_2 q_3 + v_3 q_4 + v_4 q_5,$$

*) Vedi la mia nota citata più addietro: *Sur une classe d'équations du quatrième degré.*

essendo

$$v = t - 5at_0 + 10a^2t_1 - 10a^3t_2 + 5a^4t_3 - a^5t_4, \quad v_0 = t_0 - 4at_1 + 6a^2t_2 - 4a^3t_3 + a^4t_4,$$

$$v_1 = t_1 - 3at_2 + 3a^2t_3 - a^3t_4, \quad v_2 = t_2 - 2at_3 + a^2t_4, \quad v_3 = t_3 - at_4, \quad v_4 = t_4.$$

La equazione del sesto grado, di cui le radici sono le $y_0, y_1, \ldots y_5$, sarà evidentemente della forma

$$(y-A)^6 - 4A(y-A)^5 + 10B(y-A)^3 - 4C(y-A) + 5B^2 - 4AC = 0;$$

ma, se supponesi

$$\sum y = 0,$$

sarà $A = 0$, e quella equazione si ridurrà alla

$$y^6 + 10By^3 - 4Cy + 5B^2 = 0, \tag{36}$$

e rimangono a determinarsi i valori di B, C. Ora, essendo $A = 0$, si hanno dall'equazione (36) le

$$\sum y^2 = 0, \quad \sum y^3 = -30B, \quad \sum y^4 = 0, \quad \sum y^5 = 20C;$$

quindi, supponendo

$$y^2 = v' + v'_0q_1 + v'_1q_2 + v'_2q_3 + v'_3q_4 + v'_4q_5,$$
$$y^3 = v'' + v''_0q_1 + v''_1q_2 + v''_2q_3 + v''_3q_4 + v''_4q_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ed osservando essere

$$\sum q_1 = -20a, \quad \sum q_2 = 0, \quad \sum q_3 = 30b, \quad \sum q_4 = 0, \quad \sum q_5 = -4c,$$

si avranno le

$$(37)\quad \begin{cases} 3v - 10av_0 + 15bv_2 - 2cv_4 = 0, \\ 3v' - 10av'_0 + 15bv'_2 - 2cv'_4 = 0, \\ 3v'' - 10av''_0 + 15bv''_2 - 2cv''_4 = -15B, \\ 3v''' - 10av'''_0 + 15bv'''_2 - 2cv'''_4 = 0, \\ 3v^{IV} - 10av^{IV}_0 + 15bv^{IV}_2 - 2cv^{IV}_4 = 10C. \end{cases}$$

Ora, se si moltiplicano fra loro i due polinomi

$$\alpha + \alpha_0q_1 + \alpha_1q_2 + \alpha_2q_3 + \alpha_3q_4 + \alpha_4q_5, \quad \beta + \beta_0q_1 + \beta_1q_2 + \beta_2q_3 + \beta_3q_4 + \beta_4q_5,$$

pei quali sieno

$$(38)\qquad 3\alpha - 10a\alpha_0 + 15b\alpha_2 - 2c\alpha_4 = 0,\quad 3\beta - 10a\beta_0 + 15b\beta_2 - 2c\beta_4 = 0,$$

e si indica con

$$\gamma + \gamma_0 q_1 + \gamma_1 q_2 + \gamma_2 q_3 + \gamma_3 q_4 + \gamma_4 q_5$$

il loro prodotto; si ottengono pei valori di $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, nei quali siensi eliminate le α, β col mezzo delle equazioni (38), le espressioni seguenti:

$$3\gamma_0 = 8a\alpha_0\beta_0 - 15b(\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + 2\alpha_1\beta_1) + 2c(\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + 6\alpha_1\beta_3 + 6\alpha_3\beta_1 + 6\alpha_2\beta_2)$$
$$- 3(5b^2 - 4ac)(\alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2),$$

$$3\gamma_1 = 3\alpha_0\beta_0 - 2a(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) - 15b(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2c(\alpha_1\beta_4 + \alpha_4\beta_1 + 6\alpha_2\beta_3 + 6\alpha_3\beta_2)$$
$$- 3(5b^2 - 4ac)(\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_3),$$

$$3\gamma_2 = 3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) - 2a(\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + 6\alpha_1\beta_1) + 2c(\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + 6\alpha_3\beta_3)$$
$$- 3(5b^2 - 4ac)(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3),$$

$$3\gamma_3 = 3(\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_1) - 2a(\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + 6\alpha_1\beta_2 + 6\alpha_2\beta_1) + 15b(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)$$
$$+ 2c(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3) - 3(5b^2 - 4ac)\alpha_4\beta_4,$$

$$3\gamma_4 = 3(\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) - 2a(\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + 6\alpha_1\beta_3 + 6\alpha_3\beta_1 + 6\alpha_2\beta_2)$$
$$+ 15b(\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3) - 8c\alpha_4\beta_4.$$

Formando con questi valori la espressione

$$3\gamma - 10a\gamma_0 + 15b\gamma_2 - 2c\gamma_4,$$

e ponendo in essa dapprima: $\alpha_0 = v_0$, $\alpha_1 = v_1, \ldots$, e $\beta_0 = v'_0$, $\beta_1 = v'_1, \ldots$; poi $\alpha_0 = v_0$, $\alpha_1 = v_1, \ldots$, e $\beta_0 = v'''_0$, $\beta_1 = v'''_1, \ldots$ si ottengono i valori di B, C espressi nel modo seguente:

$$(39)\begin{cases} -9B = 4(a^2 v_0 v'_0 + c^2 v_4 v'_4) - 9b[v_0 v'_1 + v_1 v'_0 + (5b^2 - 4ac)(v_3 v'_4 + v_4 v'_3) \\ + 6b[a(4v_1 v'_1 - v_0 v'_2 - v_2 v'_0) + c(4v_3 v'_3 - v_2 v'_4 - v_4 v'_2)] \\ + 6[c(v_0 v'_3 + v_3 v'_0 + v_1 v'_2 + v_2 v'_1) + a(5b^2 - 4ac)(v_1 v'_4 + v_4 v'_1 + v_2 v'_3 + v_3 v'_2)] \\ + 4ac(2v_0 v'_4 + 2v_4 v'_0 - 3v_1 v'_3 - 3v_3 v'_1 - 3v_2 v'_2) - 9b^2(v_0 v'_4 + v_4 v'_0 + v_1 v'_3 + v_3 v'_1 - 4v_2 v'_2), \end{cases}$$

e $6C$ eguale alla stessa espressione, nella quale in luogo di v'_0, v'_1, ... pongasi v'''_0, v'''_1, ...

Così i valori delle v'_0, v'_1, ... si deducono dai superiori di γ_0, γ_1, ... ponendo $\alpha_0 = \beta_0 = v_0$, $\alpha_1 = \beta_1 = v_1$, ..., e si hanno le

$$3v'_0 = 8av_0^2 - 30b(v_1^2 + v_0v_2) + 4c(3v_2^2 + 6v_1v_3 + v_0v_4) - 6(5b^2 - 4ac)(v_1v_4 + v_2v_3),$$

$$3v'_1 = 3v_0^2 - 4av_0v_1 - 30bv_1v_2 + 4c(v_1v_4 + 6v_2v_3) - 3(5b^2 - 4ac)(v_3^2 + 2v_2v_4),$$

$$3v'_2 = 6v_0v_1 - 4a(v_0v_2 + 3v_1^2) + 4c(v_2v_4 + 3v_3^2) - 6(5b^2 - 4ac)v_3v_4,$$

$$3v'_3 = 3(v_1^2 + 2v_0v_2) - 4a(v_0v_3 + 6v_1v_2) + 30bv_2v_3 + 4cv_3v_4 - 3(5b^2 - 4ac)v_4^2,$$

$$3v'_4 = 6(v_0v_3 + v_1v_2) - 4a(v_0v_4 + 6v_1v_3 + 3v_2^2) + 30b(v_3^2 + v_2v_4) - 8cv_4^2;$$

ed analogamente i valori delle v'''_0, v'''_1, ... si ottengono sostituendo nei secondi membri di queste ultime le v'_0, v'_1, ... in luogo di v_0, v_1, ...

Finalmente, ponendo nelle (39) questi valori, si avranno i valori di B, C espressi da due polinomi del terzo e del quinto grado rispetto alle v_0, v_1, ...

Ora, se si suppone

$$\sqrt{y} = l_0 \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial a} + l_1 \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial b} + l_2 \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial c},$$

le v, v_0, v_1, ... risulteranno funzioni quadratiche delle l_0, l_1, l_2, e così pure il valore di A. La equazione $A = 0$ sarà quindi una equazione di secondo grado rispetto alle indeterminate l_0, l_1, l_2, e potrà quindi essere soddisfatta determinando opportunamente una di esse. I valori corrispondenti delle v_0, v_1, ... daranno quindi quelli dei coefficienti B, C della trasformata.

9. Ogni funzione razionale intiera di $\sqrt{x}$, la quale soddisfi la relazione (8) o (9), essendo esprimibile linearmente col mezzo di $\frac{n+1}{2}$ funzioni conosciute, se indichiamo colla $\sqrt{y}$ nella equazione (30) una di quelle funzioni razionali intiere, le sue derivate prime, seconde, ... rispetto alle c_1, c_2, ... c_ν godranno della stessa proprietà, cioè saranno linearmente esprimibili mediante quelle $\frac{n+1}{2}$ funzioni. Se quindi le c_1, c_2, ... c_ν si potessero considerare come funzioni di una stessa quantità ω, quella proprietà si verificherebbe per le derivate prime, seconde, ... di $\sqrt{y}$ rispetto ad ω; ossia colla

$$\sqrt{y} = l_0\varphi_0(\sqrt{x}) + l_1\varphi_1(\sqrt{x}) + \cdots + l_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x})$$

sussisterebbero le

$$\frac{d\sqrt{y}}{d\omega} = l'_0\varphi_0(\sqrt{x}) + l'_1\varphi_1(\sqrt{x}) + \cdots + l'_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}),$$

$$\frac{d^2\sqrt{y}}{d\omega^2} = l''_0\varphi_0(\sqrt{x}) + l''_1\varphi_1(\sqrt{x}) + \cdots + l''_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}),$$

. . . .

$$\frac{d^\nu\sqrt{y}}{d\omega^\nu} = l^{(\nu)}_0\varphi_0(\sqrt{x}) + l^{(\nu)}_1\varphi_1(\sqrt{x}) + \cdots + l^{(\nu)}_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}),$$

dalle quali, eliminando le $\varphi_0(\sqrt{x})$, $\varphi_1(\sqrt{x})$, ... $\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x})$, si ottiene la equazione differenziale lineare dell'ordine ν:

$$L\sqrt{y} + L_1\frac{d\sqrt{y}}{d\omega} + L_2\frac{d^2\sqrt{y}}{d\omega^2} + \cdots + L_\nu\frac{d^\nu\sqrt{y}}{d\omega^\nu} = 0.$$

La determinazione dei coefficienti che entrano a formare quelle equazioni si può ottenere nel modo seguente. Essendo

$$\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s} = \frac{\partial\sqrt{y}}{\partial\sqrt{x}}\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c_s} + \left(\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}\right),$$

nella quale $\left(\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}\right)$ è la derivata rispetto a c_s del polinomio $\sqrt{y}$ in quanto c_s entra nei suoi coefficienti, si ha per la (31):

$$\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s} = \frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c_s}\left[2x\left(m_1\frac{dp_1}{dx} + m_2\frac{dp_2}{dx} + \cdots + m_n\frac{dp_n}{dx}\right) + m_0 + m_1p_1 + \cdots + m_np_n\right] + \left(\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}\right).$$

Ora dalla (3) si deduce essere

$$2\Delta\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c_s} = (A_{s,1} + A_{s,2}p_1 + A_{s,3}p_2 + \cdots + A_{s,n+1}p_n)\sqrt{x},$$

quindi, per la relazione facilmente dimostrabile

$$xp_i\frac{dp_r}{dx} = H_{i,r} - (b_{i+1,1}x^{r-1} + b_{i+1,2}x^{r-2} + \cdots + b_{i+1,r}),$$

nella quale

$$H_{i,r} = rp_{i+r} + (r-1)a_1p_{i+r-1} + \cdots + a_{r-1}p_{i+1}$$
$$+ (i-r+1)a_{i+1}p_{r-1} + (i-r+2)a_{i+2}p_{r-2} + \cdots + ia_{i+r},$$

si avrà, rammentando i valori di $A_{s,r}$, la

$$x\frac{dp_r}{dx}(A_{s,1}+A_{s,2}p_1+\cdots+A_{s,n+1}p_n)=\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,r}-\Delta\left(\frac{\partial a_1}{\partial c_s}x^{r-1}+\frac{\partial a_2}{\partial c_s}x^{r-2}+\cdots+\frac{\partial a_r}{\partial c_s}\right),$$

ossia:

$$x\frac{dp_r}{dx}(A_{s,1}+A_{s,2}p_1+\cdots+A_{s,n+1}p_n)=\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,r}-\Delta\left(\frac{\partial p_r}{\partial c_s}\right).$$

Sostituendo si otterrà:

$$2\Delta\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}=2\left[m_1\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,1}+m_2\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,2}+\cdots+m_n\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,n}\right]\sqrt{x}$$

$$-2\Delta\left[m_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial c_s}\right)+m_2\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_s}\right)+\cdots+m_n\left(\frac{\partial p_n}{\partial c_s}\right)\right]\sqrt{x}$$

$$+2\Delta\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c_s}(m_0+m_1p_1+\cdots+m_np_n)+2\Delta\left(\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}\right),$$

ed osservando essere

$$\left(\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}\right)=\left[\frac{\partial m_0}{\partial c_s}+\frac{\partial m_1}{\partial c_s}p_1+\cdots+\frac{\partial m_n}{\partial c_s}p_n\right.$$

$$\left.+m_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial c_s}\right)+m_2\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_s}\right)+\cdots+m_n\left(\frac{\partial p_n}{\partial c_s}\right)\right]\sqrt{x},$$

si avrà:

$$2\Delta\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}=2\left[m_1\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,1}+m_2\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,2}+\cdots+m_n\sum_0^n{}^i A_{s,i+1}H_{i,n}\right]\sqrt{x}$$

$$+2\Delta\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial c_s}(m_0+m_1p_1+\cdots+m_np_n)+2\Delta\left(\frac{\partial m_0}{\partial c_s}+\frac{\partial m_1}{\partial c_s}p_1+\cdots+\frac{\partial m_n}{\partial c_s}p_n\right)\sqrt{x}.$$

Se in questa equazione si fa $s=1, 2, \ldots \nu$ e si moltiplicano le risultanti per λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_\nu$, si ha per le (4), (5) la seguente:

$$2\Delta\sum_1^\nu{}^s\lambda_s\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}=2\left[m_1\sum_0^n{}^i\xi_iH_{i,1}+m_2\sum_0^n{}^i\xi_iH_{i,2}+\cdots+m_n\sum_0^n{}^i\xi_iH_{i,n}\right]\sqrt{x}$$

$$+(\xi_0+\xi_1p_1+\cdots+\xi_np_n)(m_0+m_1p_1+\cdots+m_np_n)\sqrt{x}$$

$$+2\Delta\left[\sum_1^\nu{}^s\lambda_s\frac{\partial m_0}{\partial c_s}+p_1\sum_1^\nu{}^s\lambda_s\frac{\partial m_1}{\partial c_s}+\cdots\right]\sqrt{x},$$

e riducendo per mezzo della formola trovata nel n° 7 pel valore del prodotto $p_r p_s$ in funzione lineare di $p_1, p_2, \ldots$, si ottiene:

$$(40) \qquad 2\Delta \sum_1^\nu \lambda_s \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c_s} = (\eta_0 + \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \cdots + \eta_n p_n)\sqrt{x},$$

nella quale, posto per brevità

$$g_{r,s} = a_s \xi_r + 3 a_{s-1} \xi_{r-1} + 5 a_{s-2} \xi_{r-2} + \cdots + (2s+1)\xi_{r-s},$$

$$f_{r,s} = a_{r+s+1} \xi_{r+1} + 3 a_{r+s+2} \xi_{r+2} + \cdots + (2n-2r-2s+1) a_{n+1} \xi_{n-s+1},$$

si ha:

$$(41) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta_r = m_0 g_{r,0} + m_1 g_{r,1} + \cdots + m_r g_{r,r} \\ \quad + m_{r+1} f_{r,1} + m_{r+2} f_{r,2} + \cdots + m_n f_{r,n-r} + 2\Delta \sum_1^\nu \lambda_s \frac{\partial m_r}{\partial c_s}. \end{array} \right.$$

Se nella equazione (40) si pongono per $\xi_0, \xi_1, \ldots$ e per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ i valori trovati antecedentemente, si otterranno le espressioni di $\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c_1}, \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c_2}, \ldots$ formate colle $\frac{n+1}{2}$ funzioni conosciute.

Per esempio, assumendo per λ_s il valore pel quale si ottenne l'equazione (18), ponendo cioè

$$\Delta \lambda_s = g_s c_s,$$

si hanno, come si è dimostrato al n° 4, le

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0;$$

quindi dalla (40) si deduce:

$$2 \sum_1^\nu g_s c_s \frac{\partial \sqrt{y}}{\partial c_s} = (\eta_0 + \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \cdots + \eta_n p_n)\sqrt{x},$$

essendo

$$\eta_i = (2i+1) m_i + 2 \sum_1^\nu g_s c_s \frac{\partial m_i}{\partial c_s}.$$

Per $n = 5$, supponendo

$$\sqrt{y} = \varphi(\sqrt{x}),$$

si hanno per le seconde delle (28):

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 6a^3 - b, \quad m_2 = 2a^2, \quad m_3 = a, \quad m_4 = 1, \quad m_5 = 0;$$

quindi:

$$2\left[a\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial a}+3b\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial b}+5c\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial c}\right]=9\varphi(\sqrt{x}).$$

Così, se

$$\sqrt{y}=\psi(\sqrt{x}),$$

sono

$$m_0=0,\quad m_1=-5a(a^3-b),\quad m_2=-(a^3-b),\quad m_3=0,\quad m_4=0,\quad m_5=1;$$

per cui:

$$2\left[a\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial a}+3b\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial b}+5c\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial c}\right]=11\psi(\sqrt{x}).$$

In generale, supponendo rappresentato $\sqrt{y}$ mediante l'equazione (30), si hanno le

$$m_0=l_0,\; m_{\nu+1}=l_1,\; m_{\nu+2}=l_2,\;\ldots\; m_n=l_{\nu-1},$$

$$m_1=l_1\xi_1+l_2\xi_1'+\cdots+l_{\nu-1}\xi_1^{(\nu-2)},$$

$$m_2=l_1\xi_2+l_2\xi_2'+\cdots+l_{\nu-1}\xi_2^{(\nu-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_\nu=l_1\xi_\nu+l_2\xi_\nu'+\cdots+l_{\nu-1}\xi_\nu^{(\nu-2)},$$

per le quali, rammentando le (13), (15), si ottengono le

$$\eta_1=\xi_1\eta_{\nu+1}+\xi_1'\eta_{\nu+2}+\cdots+\xi_1^{(\nu-2)}\eta_n,$$

$$\eta_2=\xi_2\eta_{\nu+1}+\xi_2'\eta_{\nu+2}+\cdots+\xi_2^{(\nu-2)}\eta_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_\nu=\xi_\nu\eta_{\nu+1}+\xi_\nu'\eta_{\nu+2}+\cdots+\xi_\nu^{(\nu-2)}\eta_n,$$

e dalla (40) la

$$(42)\quad 2\Delta\sum_1^\nu\lambda_s\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial c_s}=\eta_0\sqrt{x}+\eta_{\nu+1}\varphi_1(\sqrt{x})+\eta_{\nu+2}\varphi_2(\sqrt{x})+\cdots+\eta_n\varphi_{\nu-1}(\sqrt{x}),$$

ed i valori delle $\eta_0, \eta_{\nu+1}, \eta_{\nu+2}, \ldots, \eta_n$ saranno dati dalla (41), nella quale pongansi per $m_0, m_1, \ldots$ i valori superiori.

Si avranno, col mezzo di questa formola generale, per $n=5$, molto facilmente le

$$2\Delta\left[\lambda_1\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial b}+\lambda_3\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial c}\right]=\eta_0\sqrt{x}+\eta_4\varphi(\sqrt{x})+\eta_5\psi(\sqrt{x}),$$

$$2\Delta\left[\lambda_1\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial a}+\lambda_2\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial b}+\lambda_3\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial c}\right]=\vartheta_0\sqrt{x}+\vartheta_4\varphi(\sqrt{x})+\vartheta_5\psi(\sqrt{x}),$$

nelle quali λ_1, λ_2, λ_3 hanno i valori trovati nel n° 5, e

$$\eta_0 = -(519a^8 - 648a^5b - 20a^2b^2 + 256a^3c - 32abc),$$

$$\eta_4 = -20a(11a^3 - 4b), \qquad \eta_5 = -18(3a^3 - b),$$

$$\vartheta_0 = 20(a^3 - b)(22a^6 - 24a^3b - b^2 + 8ac),$$

$$\vartheta_4 = 20a^2(a^3 - b), \qquad \vartheta_5 = -5a(35a^3 - 8b),$$

ed analogamente:

$$2\Delta\left[\lambda'_1\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial a} + \lambda'_2\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial b} + \lambda'_3\frac{\partial\varphi(\sqrt{x})}{\partial c}\right] = \eta'_0\sqrt{x} + \eta'_4\varphi(\sqrt{x}) + \eta'_5\psi(\sqrt{x}),$$

$$2\Delta\left[\lambda'_1\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial a} + \lambda'_2\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial b} + \lambda'_3\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial c}\right] = \vartheta'_0\sqrt{x} + \vartheta'_4\varphi(\sqrt{x}) + \vartheta'_5\psi(\sqrt{x}),$$

essendo

$$\eta'_0 = 4(a^3 - b)(122a^6 - 120a^3b + 15b^2 + 8ac),$$

$$\eta'_4 = 180a^2(a^3 - b), \qquad \eta'_5 = 58a^4 - 73ab,$$

$$\vartheta'_0 = -10(a^3 - b)^2(41a^4 - 36ab),$$

$$\vartheta'_4 = 10(a^3 - b)^2, \qquad \vartheta'_5 = 194a^5 - 190a^2b - 4c.$$

17 marzo 1864.

[Ca.], [Pa.].

CXVII.

SOPRA LE EQUAZIONI GENERALI DELL'OTTAVO GRADO CHE HANNO LO STESSO GRUPPO DELLE EQUAZIONI DEL MOLTIPLICATORE CORRISPONDENTE ALLA TRASFORMAZIONE DI SETTIMO ORDINE DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume I (1868), pp. 68-72.

1. È noto che, posto

$$x = \sqrt{k} . \operatorname{sn}(\xi, k), \qquad y = \sqrt{\lambda} . \operatorname{sn}(z\xi, \lambda),$$

nelle quali sono ξ l'argomento, k, λ i due moduli, z il moltiplicatore, la formola per la trasformazione del settimo ordine è la seguente:

$$y = \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{x(B_3 + B_2 x^2 + B_1 x^4 + B x^6)}{B + B_1 x^2 + B_2 x^4 + B_3 x^6}.$$

Se con u, v si indicano le espressioni $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, i valori B, B_1, B_2, B_3 sono dati dalle formole:

$$k' B = (1 - uv)^2 \sqrt{z},$$

$$k k' B_1 = \frac{(1 - uv)(uv - k^2)(2u^2v^2 - uv + 2)}{(uv + \omega)(uv + \omega^2)} \sqrt{z},$$

$$k k' B_2 = \frac{(uv - k^2)(u^3v^3 - k^2)}{k(uv + \omega)(uv + \omega^2)} \sqrt{z},$$

$$k k' B_3 = \frac{uv(uv - 1)(k^2 - uv)}{(uv + \omega)(uv + \omega^2)} \sqrt{z},$$

essendo ω una radice cubica immaginaria dell'unità. La relazione fra il moltiplicatore ed i moduli è la

$$z = \frac{k^2 - uv}{uv(uv-1)(uv+\omega)(uv+\omega^2)},$$

e la equazione modulare è la seguente:

$$uv + u'v' = 1,$$

alla quale può anche darsi la forma:

$$7[uv(uv-1)(uv+\omega)(uv+\omega^2)]^2 = (uv - v^8)(k^2 - uv).$$

Infine la equazione del moltiplicatore si trova essere la

$$k^2(z+1)^7(z-7) + k'^2(z-1)^7(z+7)$$
$$- 21 \,.\, 2^8 k^2 k'^2 z^2 + 2^{11} k^2 k'^2 (1-2k^2) z = 0,$$

che sviluppata dà:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & z^8 - 28z^6 + 112(1-2k^2)z^5 - 210z^4 + 224(1-2k^2)z^3 - 28(5+3.2^6k^2k'^2)z^2 \\ & \qquad + 16(3+2^7k^2k'^2)(1-2k^2)z - 7 = 0. \end{aligned} \right.$$

2. Indicando con K, K' le funzioni complete dell'integrale ellittico, e posto

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

è noto che le radici z_∞, z_0, ... z_6 dell'equazione superiore (1) possono esprimersi per mezzo di quattro rapporti A_0, A_1, A_2, A_3 fra serie doppiamente infinite; cioè:

$$A_0 = \frac{1}{S}\sum_m q^{7m^2}, \qquad A_1 = \frac{2}{S} q^{\frac{1}{7}} \sum_m q^{7m^2+2m},$$

$$A_2 = \frac{2}{S} q^{\frac{4}{7}} \sum_m q^{7m^2+4m}, \qquad A_3 = \frac{2}{S} q^{\frac{9}{7}} \sum_m q^{7m^2+6m}, \qquad S = \sum_m q^{m^2},$$

cioè, denominando ρ una radice settima immaginaria dell'unità, si hanno le

$$(2) \qquad \sqrt{z_\infty} = A_0\sqrt{-7}, \qquad \sqrt{z_s} = A_0 + \rho^s A_1 + \rho^{4s} A_2 + \rho^{2s} A_3,$$

posto $s = 0, 1, 2, \ldots 6$.

La teoria delle funzioni ellittiche ci presenta molte altre equazioni le radici delle quali godono della proprietà espressa colle relazioni (2), come per esempio quelle che

hanno per radici le

$$\frac{\lambda}{k}z, \qquad \frac{\lambda'}{k'}z, \qquad \frac{\lambda\lambda'}{kk'}z^3, \qquad \ldots$$

Ad ognuna di queste equazioni corrispondono evidentemente differenti valori delle A_0, A_1, A_2, A_3; perciò, formando la equazione di cui le radici sono le z_∞, z_0, ... z_6 date dalle relazioni (2) nella ipotesi che le A_0, A_1 ... sieno quantità indeterminate, le varie equazioni sopra accennate saranno casi particolari di questa.

3. È noto che nelle trasformazioni del terzo e del quinto ordine i coefficienti delle equazioni corrispondenti alla superiore sono funzioni razionali intiere di due quantità nel primo caso, di tre nel secondo, queste pure funzioni razionali ed intiere delle A_0, A_1, ... Nel caso particolare, che ora ci occupa, la ricerca dei coefficienti dell'equazione dell'ottavo grado non è così semplice come pei primi due gradi ed i valori che si ottengono sono abbastanza complicati.

Posto

$$\alpha_0 = A_1 A_2 A_3,$$

$$\alpha_1 = A_2^3 A_3 + A_3^3 A_1 + A_1^3 A_2,$$

$$\alpha_2 = A_2^2 A_3^3 + A_3^2 A_1^3 + A_1^2 A_2^3,$$

$$\alpha_3 = \alpha_0^2 + A_2 A_3^5 + A_3 A_1^5 + A_1 A_2^5,$$

$$\alpha_4 = 7\alpha_0\alpha_1 + A_1^7 + A_2^7 + A_3^7,$$

osserviamo dapprima che fra le cinque quantità α_0, α_1, ... α_4 si hanno le due equazioni identiche:

$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_4 = \alpha_2^2 - 7\alpha_0^2\alpha_1,$$

$$\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_0^2\alpha_3 = 7\alpha_0^4 + 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3,$$

per le quali:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_0^3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3^2 = (\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2)^2.$$

Da queste relazioni si deducono facilmente i valori di α_3, α_4 in funzione delle α_0, α_1, α_2 sotto una forma che merita d'essere notata. Eliminando la α_4 dalle due superiori si ottiene la

$$\alpha_0\alpha_3^2 - (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0^3)\alpha_3 + 7\alpha_0^5 + \alpha_2^3 - 5\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_1^3 = 0,$$

che dà:

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\alpha_0}\left(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0^3 \pm \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 18\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2 - 27\alpha_0^6 - 4\alpha_0\alpha_2^3 - 4\alpha_0^2\alpha_1^3}\right),$$

nella quale espressione la quantità sotto il segno radicale è il discriminante della forma cubica

$$\alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 y + \alpha_2 x y^2 + \alpha_0^2 y^3.$$

Sia ora

$$z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + \cdots + a_7 z + a_8 = 0 \tag{3}$$

la equazione cercata; si ha evidentemente $a_1 = 0$, ed i coefficienti $a_2, a_3, \ldots a_8$ si ponno esprimere colle sei quantità $A_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Ponendo

$$2A_0^4 + 6A_0\alpha_0 + \alpha_1 = 2a,$$

$$8A_0^6 - 20A_0^3\alpha_0 - 10A_0^2\alpha_1 - 10A_0\alpha_2 - 14\alpha_0^2 - \alpha_3 = 8b,$$

si hanno dapprima le

$$a_2 = -28a, \qquad a_3 = 112b.$$

Il valore di a_8 si ottiene assai facilmente dal prodotto delle radici e trovasi:

$$a_8 = -7A_0^2(A_0^7 + 14A_0^4\alpha_0 - 7A_0^3\alpha_1 + 14A_0^2\alpha_2 - 7A_0\alpha_3 + \alpha_4)^2,$$

sicchè, posto

$$-c = 8A_0^5\alpha_0 - 8A_0^4\alpha_1 + 14A_0^3\alpha_2 - 7A_0^2\alpha_3 - 9A_0^2\alpha_0^2 - 3A_0\alpha_0\alpha_1 + A_0\alpha_4 - \tfrac{1}{4}\alpha_1^2,$$

si ottiene la

$$a_8 = -7(a^2 - c)^2.$$

Se inoltre poniamo

$$-\tfrac{1}{2}d = 16A_0^5\alpha_0 - 8A_0^4\alpha_1 + 12A_0^3\alpha_2 - 8A_0^2\alpha_3 - 6A_0^2\alpha_0^2 - 2A_0\alpha_0\alpha_1 + A_0\alpha_4 - \alpha_0\alpha_2,$$

possiamo dare al valore di a_4 la forma:

$$a_4 = -14(15a^2 - 29c + 14d).$$

Il valore di a_7 si può dedurre dai valori degli altri coefficienti osservando che, essendo $z_\infty = -7A_0^2$, ed il prodotto delle altre radici eguale al quadrato di una funzione intiera delle quantità $A_0, \alpha_0, \ldots$, la equazione (3), nella quale pongasi $z = z_\infty$, è divisibile per $7A_0^2$, per cui, indicando con H quella funzione, si hanno:

$$a_7 = 7^7 A_0^{14} + 7^5 a_2 A_0^{10} - 7^4 a_3 A_0^8 + 7^3 a_4 A_0^6 - 7^2 a_5 A_0^4 + 7a_6 A_0^2 - H^2,$$

$$a_8 = -7A_0^2 H^2.$$

Aggiungiamo da ultimo i valori dei coefficienti a_5, a_6, cioè:

$$a_5 = 14(16ab - 6\gamma),$$

$$a_6 = -7(32b^2 - 12a^3 + 84ac - 24ad + \delta),$$

essendo

$$\begin{aligned}\gamma = {} & 32A_0^7\alpha_0 - 16A_0^6\alpha_1 - 8A_0^5\alpha_2 - 76A_0^4\alpha_0^2 + 16A_0^4\alpha_3 + 2A_0^3\alpha_4 - 4A_0^3\alpha_0\alpha_1 \\ & + 18A_0^2\alpha_0\alpha_2 - 4A_0^2\alpha_1^2 + 6A_0\alpha_0\alpha_3 - 4A_0\alpha_1\alpha_2 - 14A_0\alpha_0^3 + 2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta = {} & 320A_0^7\alpha_2 - 220A_0^6\alpha_3 + 554A_0^6\alpha_0^2 + 112A_0^5\alpha_4 - 656A_0^5\alpha_0\alpha_1 \\ & - 80A_0^4\alpha_1^2 + 1200A_0^4\alpha_0\alpha_2 - 1360A_0^3\alpha_0^3 + 60A_0^3\alpha_1\alpha_2 - 100A_0^3\alpha_0\alpha_3 \\ & - 50A_0^2\alpha_1\alpha_3 + 440A_0^2\alpha_0\alpha_4 - 70A_0^2\alpha_2^2 + 4A_0\alpha_0^2\alpha_2 + 18A_0\alpha_2\alpha_3 \\ & - 114A_0\alpha_0\alpha_1^2 + 12A_0\alpha_1\alpha_4 - 10\alpha_2\alpha_4 + \tfrac{13}{2}\alpha_3^2 + 52\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_1^3.\end{aligned}$$

Riserviamo ad una ulteriore comunicazione lo studio di queste funzioni γ, δ.

23 gennaio 1868.

[B.], [G.].

CXVIII.

SULLA EQUAZIONE CHE DÀ I PUNTI DI FLESSO DELLE CURVE ELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume II (1869), pp. 559-565.

1. Denomineremo *curva ellittica* una curva piana dell' n^{mo} ordine, la quale abbia $\frac{n(n-3)}{2}$ punti doppi o di regresso. Queste curve, già considerate dal signor Clebsch nell'importante suo lavoro: *Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* *), hanno la proprietà che le coordinate $x_1 : x_2 : x_3$ di un punto si ponno esprimere in funzione di un parametro x nel modo seguente:

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = f_1(x) + \varphi_1(x)\psi(x), \\ \rho x_2 = f_2(x) + \varphi_2(x)\psi(x), \\ \rho x_3 = f_3(x) + \varphi_3(x)\psi(x), \end{cases}$$

nelle quali le funzioni f, φ sono intiere e razionali, e

$$\psi(x) = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}.$$

I polinomi f sono, per n pari, del grado $\frac{n}{2}$, e del grado $\frac{n+1}{2}$ per n dispari;

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXIV (1865), pp. 210-270.— Vedi anche Clebsch und Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* (Leipzig, 1866), pag. 70.

ed i φ sono nel primo caso del grado $\frac{n}{2} - 2$, e nel secondo di grado $\frac{n-3}{2}$; cosicchè una curva ellittica dell'ordine pari n ed una della stessa specie dell'ordine $n - 1$ possono essere rappresentate dalle stesse relazioni (1), solo che in quest'ultimo caso i coefficienti delle f, φ devono soddisfare ad alcune condizioni, come si vedrà in seguito.

Se indichiamo con accenti le derivate rispetto al parametro x, è noto essere la equazione, che dà i punti di flesso per la curva che si considera, la seguente:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora, indicando con A, A_1, A_2 i determinanti

$$\sum \pm f_1 f'_2 f''_3, \qquad \sum \pm \varphi_1 f'_2 f''_3, \qquad \sum \pm f_1 \varphi'_2 f''_3,$$

e con B, B_1, B_2 quelli che si ottengono dai medesimi permutando le f, φ; inoltre con C, C_1 i determinanti

$$\sum \pm f_1 f'_2 \varphi'_3, \qquad \sum \pm \varphi_1 f_2 f'_3;$$

e con D, D_1 quelli che si deducono colla stessa permutazione dai superiori; si giunge facilmente, sostituendo i valori (1) nella (2), alla equazione seguente:

$$(3)\, A + A_0\psi + B_0\psi^2 + B\psi^3 + (C_0 - D_0\psi)\psi' + (C_1 - D_1\psi)\psi'' + 2D_1\psi'^2 = 0,$$

nella quale si è posto:

$$(4)\, A_0 = A_1 + 2A_2 + C', \quad B_0 = B_1 + 2B_2 + D', \quad C_0 = 3C - C'_1, \quad D_0 = 3D - D'_1.$$

Se infine si denominano con u, v i polinomi del secondo e del quarto grado

$$\tfrac{1}{2}[1 - 2(1 + k^2)x + 3k^2x^2], \qquad \tfrac{1}{4}[3k^4x^4 - 4k^2(1 + k^2)x^3 + 6k^2x^2 - 1],$$

si ha

$$\psi' = \frac{u}{\psi}, \qquad \psi'' = \frac{v}{\psi^3};$$

sostituendo questi valori nella (3) e facendo sparire i radicali, si ottiene la

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & C_1^2 v^2 + [2 C_0 C_1 u v - D_1^2 (2 u^2 - v)^2] \psi^2 \\ & + [C_0^2 u^2 + 2 A_0 C_1 v + 2 D_1 (D_0 u - A)(2 u^2 - v)] \psi^4 \\ & + [2 A_0 C_0 u + 2 B C_1 v - (D_0 u - A)^2 - 2 B_0 D_1 (2 u^2 - v)] \psi^6 \\ & + [A_0^2 + 2 B C_0 u + 2 B_0 (D_0 u - A)] \psi^8 + (2 A_0 B - B_0^2) \psi^{10} + B^2 \psi^{12} = 0, \end{aligned}\right.$$

equazione di cui le radici sono i valori del parametro x corrispondenti ai punti di flesso della curva.

Per n pari, il grado di C_1 essendo $\frac{3n}{2} - 4$; perciò $\frac{3n}{2} - 5$ quello di C_0; $\frac{3n}{2} - 6$ i gradi di A, A_0, D_1; quindi $\frac{3n}{2} - 7$, $\frac{3n}{2} - 8$ quelli di D_0 e di B_0; infine $\frac{3n}{2} - 12$ il grado di B; si ha che il grado dell'equazione superiore è eguale a $3n$, come è noto. Ma per n dispari, il grado dell'equazione stessa deducendosi da quello corrispondente ad n pari, mutando la n in $n + 1$, risulterebbe eguale a $3(n + 1)$, mentre il numero dei punti di flesso non può essere superiore a $3n$. Il primo membro dell'equazione (5) deve quindi per n dispari contenere un fattore del terzo grado estraneo alla quistione, e per l'esistenza di esso si vengono appunto a stabilire quelle relazioni fra i coefficienti delle f, φ ed il modulo k, delle quali si fece cenno più sopra.

2. Consideriamo in particolare le curve del terzo ordine e quelle del quarto con due punti doppi. Nell'uno e nell'altro di questi casi le φ essendo costanti, si hanno le

$$A_2 = B = B_1 = B_2 = C = D = D_1 = 0;$$

le equazioni (3), (4) dànno:

$$(6)\qquad A + A_1 \psi - C_1' \psi' + C_1 \psi'' = 0,$$

nella quale A ed A_1 sono costanti, C_1 è del secondo grado in x; e la (5) diventa:

$$(6')\ C_1^2 v^2 - 2 C_1 C_1' u v \psi^2 + (C_1'^2 u^2 + 2 A_1 C_1 v) \psi^4 - (2 A_1 C_1' u + A^2) \psi^6 + A_1^2 \psi^8 = 0.$$

Sia

$$C_1 = \delta_0 x^2 - 2 \delta_1 x + \delta_2 = \delta_0 (x - x_0)(x - x_1),$$

si ha evidentemente $A_1 = 2 \delta_0$.

Ora dalla equazione identica

$$\psi^4 = [2 u (x - x_0) + k^2 (x - x_0)^3 + \psi_0^2] \psi^2 - (x - x_0)^2 (u^2 + v),$$

e dalla analoga nella quale siasi posto x_1 in luogo di x_0, si deduce la seguente

$$4\delta_0^2\psi^4 = 2\left(2\delta_0 C_1' u + \frac{k^2}{\delta_0} C_1'^3 - 3k^2 C_1 C_1' + \delta_0^2\psi_0^2 + \delta_0^2\psi_1^2\right)\psi^2 - 2(u^2+v)(C_1'^2 - 2\delta_0 C_1),$$

per mezzo della quale eliminando ψ^8 dalla superiore (6′) ottiensi:

$$C_1^2 v^2 - 2C_1 C_1' uv\psi^2 + (4\delta_0 C_1 - C_1'^2)(u^2+2v)\psi^4$$
$$+\left(2\frac{k^2}{\delta_0} C_1'^3 - 6k^2 C_1 C_1' + 2\delta_0^2\psi_0^2 + 2\delta_0^2\psi_1^2 - A^2\right)\psi^6 = 0,$$

essendo ψ_0, ψ_1 i valori di ψ corrispondenti ad $x = x_0$, $x = x_1$.
Questa equazione, osservando essere

$$4\delta_0 C_1 - C_1'^2 = 4(\delta_0\delta_2 - \delta_1^2) = 4\Delta,$$

può anche scriversi:

$$C_1^2 v^2 - 2C_1 C_1' uv\psi^2 + 4\Delta(u^2+2v)\psi^4$$
$$+\left(2k^2 C_1 C_1' - \frac{8k^2}{\delta_0} C_1'\Delta + 2\delta_0^2\psi_0^2 + 2\delta_0^2\psi_1^2 - A^2\right)\psi^6 = 0.$$

Infine, posto $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \delta$, essendo

$$u^2 + v = -(1 + k^2 - 3k^2 x)\psi^2(x),$$
$$2\delta_0^2(\psi_0^2 + \psi_1^2) = 4\delta_0^2\psi^2(\delta) + 4\Delta(1 + k^2 - 3k^2\delta),$$

si avrà:

$$4\Delta(u^2+v) + 2\delta_0^2(\psi_0^2+\psi_1^2)\psi^2 = \left[6\frac{k^2}{\delta_0}\Delta C_1' + 4\delta_0^2\psi^2(\delta)\right]\psi^2;$$

quindi sostituendo si giungerà all'equazione richiesta:

$$(7)\quad C_1^2 v^2 - 2C_1 C_1' uv\psi^2 + 4\Delta v\psi^4 + \left[\frac{k^2}{2\delta_0} C_1'^3 + 4\delta_0^2\psi^2(\delta) - A^2\right]\psi^6 = 0.$$

Se $n = 3$, vedesi facilmente che, supposto $\Delta = 0$, inoltre $A = \pm 2\delta_0\psi(\delta)$, la equazione superiore è divisibile pel fattore di terzo grado $\delta_0^2(x - x_0)^3$, ed eseguita la divisione, si avrà per l'equazione del nono grado, che dà i punti di flesso di una cubica:

$$(x - x_0)v^2 - 4uv\psi^2 + 4k^2\psi^6 = 0,$$

alla quale, per la identità

$$v^2 - 4uv(1-x)(1-k^2x) + 4k^2x^2(1-x)^3(1-k^2x)^3 = w^2,$$

posto

$$w = \frac{1}{4}[k^4 x^4 - 6k^2 x^2 + 4(1+k^2)x - 3],$$

può darsi la forma:

$$x w^2 - x_0 v^2 = 0. \tag{8}$$

Ma, supponendo

$$f_s(x) = a_s + b_s x + c_s x^2, \qquad \varphi_s = \alpha_s,$$

e quindi

$$\delta_0 = \sum \pm \alpha_1 b_2 c_3, \quad \delta_1 = \sum \pm a_1 \alpha_2 c_3, \quad \delta_2 = \sum \pm a_1 b_2 \alpha_3, \quad A = 2\sum \pm a_1 b_2 c_3,$$

si hanno le

$$\frac{1}{2} A \alpha_s = a_s \delta_0 + b_s \delta_1 + c_s \delta_2; \qquad (s = 1, 2, 3)$$

dunque per le cubiche, alle due relazioni stabilite sopra fra i coefficienti delle f, φ ponno sostituirsi le

$$a_s + b_s x_0 + c_s x_0^2 + \alpha_s \psi_0 = 0,$$

per la sussistenza delle quali nelle (1) dovrà ρ annullarsi per $x = x_0$.

Per una curva del quarto ordine con due punti doppi, i valori delle a_1, b_1, c_1, α_1 sono i seguenti *):

$$a_1 = m_1[p^2 - (p_2 + p_3)p + p_2 p_3],$$

$$b_1 = - m_1[2p + (p_2 + p_3)q + 2k^2 p_2 p_3 p],$$

$$c_1 = m_1[1 - k^2(p_2 + p_3)p + k^4 p_2 p_3 p^2],$$

$$\alpha_1 = - 2m_1(p_2 - p_3)\psi(p),$$

essendo

$$q = 1 - 2(1+k^2)p + k^2 p^2;$$

ed i valori della a_2, b_2, c_2, α_2; a_3, b_3, c_3, α_3 si deducono dai superiori sostituendo q_2 a p_2, m_2 ad m_1 nel primo caso; q_3 a p_3, m_3 ad m_1 nel secondo.

Per questi valori si ha dapprima:

$$A = M(p_3 - p_2)\{1 - 2(1+k^2)p - k^2 p^2[-5 + 5k^2 p^2 - 2(1+k^2)k^2 p^3 + k^4 p^4]\},$$

*) Vedi la Memoria citata del signor CLEBSCH, p. 255.

poi:

$$C_1 = 2M\psi(p)\{(q + 2k^2p^2)x^2 - 2p(1 - k^2p^2)x - p^2(q + 2)$$
$$+ (p_2 + p_3)(1 - k^2p^2)[k^2px^2 + (1 + k^2p^2)x + p]$$
$$- p_2p_3[k^4p^2(q + 2)x^2 + 2k^2p(1 - k^2p^2)x - (q + 2k^2p^2)]\},$$

posto

$$M = 2m_1m_2m_3(p_2 - q_2)(p_3 - q_3);$$

e questi valori sostituiti nella (7) conducono all'equazione del dodicesimo grado, che dà i punti di flesso per le curve di quarto ordine con due punti doppi.

In generale, fatta eccezione del caso $n = 3$, la sussistenza del fattore del terzo grado contenuto nel primo membro della (5) si palesa tosto, allorquando suppongasi che le funzioni f abbiano un fattore lineare comune, e questo fattore sia il parametro x. Infatti in questo caso C_1 ha il fattore x^2 e C, D hanno il fattore x, quindi il primo membro della (5) è divisibile per x^3. Ma se $n = 3$, si avrebbe in questa ipotesi $A = 0$, e l'equazione (6) che dà i punti di flesso si ridurrebbe al sesto grado.

Del resto, egli è evidente che per la rappresentazione (1) di una curva ellittica, la equazione che dà i punti di flesso, ed in generale le equazioni, che dànno i valori del parametro x relativi a punti di contatto di qualunque ordine fra la curva data ed un'altra curva, corrispondono alla relazione algebrica del teorema d'Abel. Per esempio, per la curva di quarto ordine con due punti doppi considerata sopra, denominando l, m i valori del parametro per uno dei punti doppi, l'equazione che dà i punti di flesso prende la forma *):

$$(x - l)^3\Psi''(x, l) - h(x - m)^3\Psi''(x, m) = 0,$$

nella quale

$$\Psi(x, l) = \frac{\psi(x) - \psi(l)}{x - l},$$

e gli accenti indicano derivate rispetto ad x. Il coefficiente h è dato, come è noto, dalle

$$f_1(l) + \varphi_1(l)\psi(l) = h[f_1(m) + \varphi_1(m)\psi(m)].$$

Infatti l'equazione superiore sviluppata dà:

$$2[\psi(x) - \psi(l)] - 2(x - l)\psi' + (x - l)^2\psi''$$
$$- h\{2[\psi(x) - \psi(m)] - 2(x - m)\psi' + (x - m)^2\psi''\} = 0,$$

*) Per le cubiche la relazione sarebbe $\Psi''(x, x_0) = 0$.

la quale coincide colla (6), posto

$$A = 2[h\psi(m) - \psi(l)], \qquad A_1 = 2(1-h), \qquad C_1 = (x-l)^2 - h(x-m)^2,$$

e quindi:

$$\delta_0 = 1 - h, \qquad \delta_1 = l - hm, \qquad \delta_2 = l^2 - hm^2.$$

3. La risoluzione della equazione (8) fu già soggetto, da un altro punto di vista, di una importante Memoria del signor HESSE *), riportata dal signor SERRET in una Nota del suo *Cours d'Algèbre Supérieure*. Che quella equazione sia risolubile algebricamente, risulta dall'essere la medesima l'equazione corrispondente alla trisezione delle funzioni ellittiche; ma questa considerazione ci offre anche il mezzo più semplice per giungere a quella soluzione. Si indichino con p, q due quantità definite dalle relazioni

$$pq = -3, \qquad p^3 - 6p + q = 4\frac{1+k^2}{k};$$

i polinomi v, w dell'equazione (8) potranno scriversi nel modo seguente:

$$v = -\tfrac{1}{4}(1+pkx)[(1+pkx)^2 + qkx(p+kx)^2],$$

$$w = \tfrac{1}{4}(p+kx)[q(1+pkx)^2 + kx(p+kx)^2],$$

ossia, ponendo

$$y = kx\frac{(p+kx)^2}{(1+pkx)^2},$$

si avranno le

$$v = -\tfrac{1}{4}(1+pkx)^3(1+qy), \qquad w = \tfrac{1}{4}(p+kx)(1+pkx)^2(q+y),$$

e sostituendo nella (8):

$$kx_0 = y\frac{(q+y)^2}{(1+qy)^2} = y\frac{(py-3)^2}{(p-3y)^2}.$$

La risoluzione dell'equazione (8) del nono grado dipenderà quindi:

1°) dalla risoluzione dell'equazione del quarto grado

$$p^4 - 6p^2 - 4\frac{1+k^2}{k}p - 3 = 0;$$

---

*) HESSE, *Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9. Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function* $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ *je zweier Wurzeln* x_λ, x_μ *eine dritte Wurzel* $x_\varkappa$ *giebt, so dass gleichzeitig:* $x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa)$, $x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXIV (1847), pp. 193-208].

2°) dalla risoluzione dell'equazione del terzo grado

$$y(py-3)^2 - kx_0(p-3y)^2 = 0\,;$$

3°) dalla risoluzione della seconda equazione del terzo grado

$$kx(kx+p)^2 - y(pkx+1)^2 = 0.$$

Da queste equazioni si potrebbero facilmente dedurre le note proprietà dei punti di flesso di una cubica.

15 aprile 1869.

[Pi.], [G.].

CXIX.

SOPRA TALUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI AD INTEGRALE ALGEBRICO.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume IX (1876), pp. 786-794; volume X (1877), pp. 48-57.

1. È noto pei lavori del prof. KUMMER *) che, indicando con υ_1, υ_2 due integrali particolari della equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + p\frac{d\upsilon}{dx} + q\upsilon = 0, \tag{1}$$

la funzione

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \tag{2}$$

nella quale

$$z_1 = a\upsilon_1 + b\upsilon_2, \qquad z_2 = \alpha\upsilon_1 + \beta\upsilon_2,$$

a, b, α, β costanti, soddisfa ad una equazione differenziale del terzo ordine. Dalla (2) si ha infatti:

$$\log\frac{dz}{dx} = \log\left(z_2\frac{dz_1}{dx} - z_1\frac{dz_2}{dx}\right) - 2\log z_2,$$

*) KUMMER, *Ueber die hypergeometrische Reihe*

$$1 + \frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$$

[Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XV (1836), pp. 39-83, 127-172].

e quindi:

$$\frac{d \log \frac{dz}{dx}}{dx} = -p - \frac{2}{z_2}\frac{dz_2}{dx}, \tag{3}$$

in quanto che le z_1, z_2 soddisfano evidentemente l'equazione differenziale (1). Da questa (3) deducesi facilmente che, posto

$$[z]_x = \frac{d^2 \log \frac{dz}{dx}}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \frac{dz}{dx}}{dx}\right)^2,$$

si ha:

$$[z]_x = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}, \tag{4}$$

cioè l'equazione differenziale del terzo ordine richiesta.

Se

$$p = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}, \quad q = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}, \tag{5}$$

e perciò le v_1, v_2 sono, come è noto, serie ipergeometriche di GAUSS, la equazione (4) diventa:

$$[z]_x = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2x(1-x)}, \tag{6}$$

nella quale λ, μ, ν sono le radici positive delle

$$(1-\gamma)^2 = \lambda^2, \quad (\alpha - \beta)^2 = \mu^2, \quad (\gamma - \alpha - \beta)^2 = \nu^2.$$

2. Indichiamo con f una forma binaria dell'n^{mo} ordine, e supponiamo che, sostituendo in essa in luogo delle variabili gli integrali z_1, z_2, risulti

$$f(z_1, z_2) = K, \tag{7}$$

essendo K una costante. Questa dà:

$$f_1 \frac{dz_1}{dx} + f_2 \frac{dz_2}{dx} = 0, \tag{8}$$

posto $f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial z_1}$, $f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial z_2}$; ma si ha per la (1):

$$z_2 \frac{dz_1}{dx} - z_1 \frac{dz_2}{dx} = Ce^{-\int p dx},$$

dove C è una costante, quindi si ottengono le

$$(9) \qquad \frac{dz_1}{dx} = \frac{C}{K} f_2 e^{-\int p dx}, \quad \frac{dz_2}{dx} = -\frac{C}{K} f_1 e^{-\int p dx}.$$

Queste due relazioni sono molto importanti, potendosi col loro mezzo calcolare assai facilmente i valori dei covarianti della forma (7) in funzione della variabile x. Differenziando infatti nuovamente la (8) rispetto ad x e ponendo

$$\frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = f_{11}, \quad \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = f_{12}, \quad \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = f_{22},$$

si ottiene dapprima, rammentando che le z_1, z_2 soddisfano l'equazione (1):

$$(10) \qquad (n-1)\left[f_{11}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2 f_{12} \frac{dz_1}{dx} \frac{dz_2}{dx} + f_{22}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2\right] = Kq,$$

e sostituendo in essa i valori (9) si giunge alla

$$(11) \qquad h(z_1, z_2) = \frac{K^2}{(n-1) C^2} q \cdot e^{2\int p dx},$$

essendo h l'hessiano della forma f, cioè:

$$h = \frac{1}{2}(ff)^2.$$

La (11) differenziata a sua volta rispetto ad x, colla sostituzione dei valori (9) conduce al covariante

$$\theta(z_1, z_2) = -\frac{K^3}{(n-1)(n-2) C^3}\left(\frac{dq}{dx} + 2pq\right) e^{3\int p dx}.$$

Si ha così il seguente

Teorema. — *Essendo v_1, v_2 due integrali particolari della equazione differenziale del secondo ordine* (1), *z_1, z_2 funzioni lineari dei medesimi, ed $f(z_1, z_2)$ una forma binaria dell'n^{mo} ordine; se*

$$f(z_1, z_2) = K,$$

e K costante, i covarianti $h = \frac{1}{2}(ff)^2$, $\theta = 2(fh)$ della medesima sono funzioni della variabile x dati dalle

$$(12) \qquad \begin{cases} h(z_1, z_2) = \dfrac{K^2}{(n-1) C^2} q e^{2\int p dx}, \\ \theta(z_1, z_2) = -\dfrac{K^3}{(n-1)(n-2) C^3}\left(\dfrac{dq}{dx} + 2pq\right) e^{3\int p dx}, \end{cases}$$

qualunque sieno le p, q.

Questo teorema può essere facilmente generalizzato dalle seguenti considerazioni. Se indicasi con $F_1(x)$ il primo membro della (8) e con $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... le espressioni:

$$F_2(x) = f_{11}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2f_{12}\frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx} + f_{22}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2,$$

$$F_3(x) = f_{111}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^3 + 3f_{112}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2\frac{dz_2}{dx} + 3f_{122}\frac{dz_1}{dx}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2 + f_{222}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^3,$$

. . . .

si hanno le

$$\frac{dF_1}{dx} = (n-1)F_2(x) - pF_1(x) - Kq,$$

$$\frac{dF_2}{dx} = (n-2)F_3(x) - 2pF_2(x) - 2qF_1(x),$$

$$\frac{dF_3}{dx} = (n-3)F_4(x) - 3pF_3(x) - 3qF_2(x),$$

e così di seguito. Ora, essendo $F_1(x) = 0$ e quindi $\frac{dF_1(x)}{dx} = 0$, si deduce dalla prima il valore di $F_2(x)$ in funzione di p, q ed ordinatamente dalle altre i valori di $F_3(x)$, $F_4(x)$, ... Così si avranno le

$$(13)\quad \begin{cases} F_2(x) = \dfrac{K}{n-1}q, \\ F_3(x) = \dfrac{K}{(n-1)(n-2)}\left(\dfrac{dq}{dx} + 2pq\right), \\ F_4(x) = \dfrac{K}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left[\dfrac{d^2q}{dx^2} + 2q\dfrac{dp}{dx} + 5p\dfrac{dq}{dx} \right. \\ \qquad\qquad \left. + 6p^2q + 3(n-2)q^2\right]. \end{cases}$$

Ciò posto, rammentiamo che, se nella forma $f(z_1, z_2)$ sostituiamo alle z_1, z_2 le espressioni

$$(14)\qquad z_1\xi_1 - f_2\xi_2, \qquad z_2\xi_1 + f_1\xi_2,$$

ed indichiamo con

$$(p_0, p_1, p_2, \dots p_n)(\xi_1, \xi_2)^n$$

il risultato, le funzioni p_0, p_1, p_2, ... sono covarianti associati alla forma f, e si

hanno, per esempio, le

$$p_0 = f, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = fh, \quad p_3 = f\theta, \quad \ldots$$

cioè qualunque covariante di f moltiplicato per una potenza della stessa f è una funzione intiera e razionale delle $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$. Ora pei valori (9) le due espressioni lineari (14) diventano:

$$z_1\xi_1 - t\frac{dz_1}{dx}\xi_2, \quad z_2\xi_1 - t\frac{dz_2}{dx}\xi_2,$$

essendo $t = \frac{K}{C}e^{\int p dx}$; quindi si avrà:

$$p_r = (-1)^r t^r F_r(x) = (-1)^r \frac{K^r}{C^r} e^{r\int p dx} F_r(x), \tag{15}$$

la quale conduce al

TEOREMA. — *I covarianti associati alla forma $f(z_1, z_2) = K$ si possono esprimere per mezzo delle funzioni p, q e delle loro derivate rispetto ad x.*

Riservandoci di mostrare in un'altra comunicazione le importanti conseguenze che da questo teorema possono derivarsi, ci limiteremo ora ad indicare nel seguente paragrafo alcune applicazioni delle formole (12).

3. Supponiamo ora che le p, q abbiano i valori (5); le relazioni (12) dànno facilmente le seguenti:

$$h(z_1, z_2) = -\frac{\alpha\beta K^2}{(n-1)C^2} x^{2\gamma-1}(1-x)^{2(\alpha+\beta-\gamma)+1},$$

$$\theta(z_1, z_2) = \frac{\alpha\beta K^3}{(n-1)(n-2)C^3}[2\gamma - 1 - 2(\alpha+\beta)x]\, x^{3\gamma-2}(1-x)^{3(\alpha+\beta-\gamma)+2},$$

dalle quali deducesi la

$$\left\{ \begin{aligned} & 4h^3 + \theta^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 K^6}{(n-1)^2 C^6} x^{2(3\gamma-2)}(1-x)^{6(\alpha+\beta-\gamma)+2} P, \\ & P = \frac{1}{(n-2)^2}[2\gamma - 1 - 2(\alpha+\beta)x]^2 - \frac{4\alpha\beta}{n-1}x(1-x). \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Osservando quest'ultima relazione, scorgesi tosto che, supponendo

$$2(\alpha+\beta) = 2\gamma - 1, \tag{17}$$

essa semplificasi assai, riducendosi alla

$$4h^3 + \theta^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 K^6}{(n-1)^2 C^6} x^{2(3\gamma-2)} \left[\frac{(2\gamma-1)^2}{(n-2)^2}(1-x) - \frac{4\alpha\beta}{n-1} x \right],$$

mentre il valore di h nella stessa ipotesi diventa:

$$h(z_1, z_2) = -\frac{\alpha\beta K^2}{(n-1) C^2} x^{2\gamma-1}. \tag{18}$$

Suppongasi inoltre

$$\frac{(2\gamma-1)^2}{(n-2)^2} + \frac{4\alpha\beta}{n-1} = 0; \tag{19}$$

sarà

$$4h^3 + \theta^2 = \frac{\alpha^2\beta^2(2\gamma-1)^2 K^6}{(n-1)^2(n-2)^2 C^6} x^{2(3\gamma-2)}, \tag{20}$$

e dalle (17), (19) si otterranno per α, β i valori:

$$\alpha = \frac{2\gamma-1}{2} \cdot \frac{n-1}{n-2}, \qquad \beta = -\frac{2\gamma-1}{2} \cdot \frac{1}{n-2};$$

e pei valori di λ, μ, ν della equazione (6):

$$\lambda = 1 - \gamma, \quad \mu = \frac{2\gamma-1}{2} \frac{n}{n-2}, \quad \nu = \frac{1}{2}.$$

Facciasi ora dapprima $\gamma = \frac{2}{3}$, saranno:

$$\alpha = \frac{n-1}{6(n-2)}, \quad \beta = -\frac{1}{6(n-2)}; \quad \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{n}{6(n-2)}, \quad \nu = \frac{1}{2},$$

e la (20) dà luogo alla

$$4h^3 + \theta^2 = \frac{1}{9 \cdot 6^4} \cdot \frac{K^6}{(n-2)^6 C^6} = -D,$$

essendo D una costante. Si avrà cioè, rammentando la (7):

$$4h^3(z_1, z_2) + \theta^2(z_1, z_2) + Df^k(z_1, z_2) = 0, \tag{21}$$

nella quale $k = 6\frac{n-2}{n} = \frac{1}{\mu}$.

Sia in secondo luogo

$$2(3\gamma - 2) = r(2\gamma - 1), \quad r = 2\frac{n-3}{n-2},$$

e quindi

$$\gamma = \frac{n-1}{n};$$

si avranno le

$$\alpha = \frac{n-1}{2n}, \quad \beta = -\frac{1}{2n}; \quad \lambda = \frac{1}{n}, \quad \mu = \nu = \frac{1}{2};$$

e le (18), (20) diventano:

$$h = \frac{K^2}{4n^2 C^2} x^{\frac{n-2}{n}}, \quad 4h^3 + \theta^2 = \frac{K^6}{4^2 n^6 C^6} x^{2\frac{n-3}{n}};$$

da cui:

$$4h^3 + \theta^2 + Dh^r = 0,$$

od anche:

$$4h^3(z_1, z_2) + \theta^2(z_1, z_2) + Df^2(z_1, z_2)h^r(z_1, z_2) = 0, \tag{22}$$

essendo D una costante.

Le equazioni (21), (22) hanno evidentemente un particolare interesse nella quistione, mentre per esse vengono a stabilirsi delle relazioni le quali devono sussistere fra una forma binaria f dell'n^{mo} ordine, i suoi covarianti h, θ e l'invariante D, quando la forma stessa soddisfi la $f(z_1, z_2) = \text{Cost.}$; e queste relazioni ponno quindi tener luogo di quella proprietà della forma f in quanto che ne determinano la proprietà caratteristica.

La equazione (11), nel caso generale, ossia la

$$(n-1)C^2 h - K^2 q e^{2\int p dx} \cdot f^{2m} = 0, \tag{23}$$

e le equazioni che si deducono dalla (18)

$$4h^3 + Dxf^k = 0, \quad 4h^{\frac{n}{n-2}} + Dxf^2 = 0, \tag{24}$$

nei due casi particolari sopra considerati sono evidentemente integrali algebrici della (6).

4. Sia $n = 3$, le (21), (22) coincidono nella

$$4h^3 + \theta^2 + Df^2 = 0,$$

la quale, allorquando intendasi essere D il determinante della forma cubica f, è la nota relazione esistente fra il sistema di forme appartenente alla forma stessa. Le (24) dànno pure la equazione unica

$$4h^3 + Dxf^2 = 0,$$

integrale algebrico razionale dell'equazione differenziale (6), nella quale sieno

$$\lambda = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \nu = \frac{1}{2}.$$

Sia in secondo luogo $n = 4$, si ha dalle (21), (22):

$$4h^3 + \theta^2 + Df^3 = 0, \qquad 4h^3 + \theta^2 + Df^2 h = 0;$$

ma, come è noto, indicando con g_2, g_3 gli invarianti della biquadratica f, si ha in generale la relazione:

$$4h^3 + \theta^2 - g_2 f^2 h + g_3 f^3 = 0;$$

quindi le superiori corrispondono la prima al caso in cui $g_2 = 0$, la seconda a quello in cui $g_3 = 0$. Le (24) diventano perciò le

$$4h^3 + g_3 x f^3 = 0, \qquad 4h^2 - g_2 x f^2 = 0,$$

le quali sono integrali algebrici razionali della (6), supponendo in essa

$$\text{nel } 1^\circ \text{ caso:} \quad \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}, \quad \nu = \frac{1}{2};$$

$$\text{» } 2^\circ \text{ »} \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2},$$

e che per la forma biquadratica f sussista l'una o l'altra delle equazioni $g_2 = 0$, $g_3 = 0$.

Passando a forme di più alto ordine distingueremo, come per quella di quarto, il caso in cui il covariante $g_2 = \frac{1}{2}(ff)^4$ è identicamente nullo, da quello in cui sia nullo il covariante

$$g_3 = \sum (\pm f_{1111} f_{1122} f_{2222}).$$

Il primo caso già presentatosi al prof. SCHWARZ nelle sue ricerche sulla serie ipergeometrica *), e studiato in seguito dai sig[i]. WEDEKIND, KLEIN e da me **) limitasi alle forme degli ordini 4°, 6°, 12°; e per queste, fra la forma f, i covarianti h, θ ed una funzione D dell'invariante quadratico sussiste la relazione (21), mentre la prima delle (24) è l'integrale algebrico e razionale della equazione ipergeometrica (6), posto

---

*) SCHWARZ, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die* GAUSS'*sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXV (1873), pp. 292-335].

**) WEDEKIND, *Studien im binären Werthgebiet*, Carlsruhe, 1876. — KLEIN, *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* [Mathematische Annalen, t. IX (1876), pp. 183-208]. — BRIOSCHI, *Sopra una classe di forme binarie* [LXXII: t. II, pp. 157-176].

nella medesima:

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{1}{k}, \quad \nu = \frac{1}{2}; \quad k = 6\frac{n-2}{n}.$$

Nel secondo caso essendo $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ qualunque sia n, gli stessi integrali particolari υ_1, υ_2 sono, per una proprietà delle serie ipergeometriche *), funzioni algebriche di x. La relazione (22) vale in questo caso tanto per n pari quanto per n dispari, essendo D una funzione dell'invariante quadratico, oppure una funzione di un invariante biquadratico. La seconda delle equazioni (24) dà un integrale algebrico della (6), se in questa supponesi

$$\lambda = \frac{1}{n}, \quad \mu = \nu = \frac{1}{2} \text{ **)}.$$

5. Dalle calcolazioni eseguite sopra al n° 2 risulta evidente che nello stesso modo, col quale dalla forma f si ottennero i valori dei covarianti h, θ in funzione della variabile x, si potranno ottenere quelli di altri covarianti, e che la medesima ricerca potrebbe farsi senza modificare la via seguita, allorquando la forma f denominata dal prof. FUCHS ***) *forma principale* (*Primform*) fosse essa stessa una funzione algebrica di x. Ma, ristringendoci pel momento alle forme considerate sopra, notiamo ancora, come esempio di queste ricerche più generali, che, le formole del n° 2 sussistendo qualunque sieno le p, q, se supponesi $n = 4$ e

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad q = -\frac{1}{32}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}, \tag{25}$$

essendo $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$, si avrà $e^{\int p dx} = \sqrt{\varphi(x)}$ e quindi per le (12):

$$h = -\frac{K^2 x}{4 C^2}, \quad \theta = K^3 \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{8 C^3}. \tag{26}$$

Da queste deducesi la

$$4h^3 + \theta^2 = -\frac{K^6}{4^3 C^6}(g_2 x + g_3) = \frac{K^6}{4^3 C^6}\left(4\frac{C^2}{K^2} g_2 h - g_3\right),$$

---

*) Vedi la citata Memoria del sig. SCHWARZ (pag. 324), ed il volume III (pag. 125) delle Opere di GAUSS [CARL FRIEDRICH GAUSS, Werke, Göttingen].

**) A questi risultati si può anche giungere formando i valori dei covarianti $g_2(\upsilon_1, \upsilon_2)$, $g_3(\upsilon_1, \upsilon_2)$ in funzione di p, q, come mostrerò in una prossima comunicazione.

***) FUCHS: *Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXI (1876), pp. 97-142].

e, ponendo $4C^2 = K$, si avrà

$$4h^3 + \theta^2 - g_2 h f^2 + g_3 f^3 = 0,$$

cioè la nota relazione fra le forme del sistema appartenente ad una biquadratica, e dalla prima delle (26) si dedurrà la

$$xf + h = 0,$$

integrale algebrico razionale della equazione differenziale del secondo ordine (2), nella quale p, q hanno i valori (25). Indicando con e_0, e_1, e_2 le radici della equazione $\varphi(x) = 0$, si hanno facilmente le

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - e_0} + \frac{1}{x - e_1} + \frac{1}{x - e_2}\right),$$

$$q = \frac{\gamma_0}{x - e_0} + \frac{\gamma_1}{x - e_1} + \frac{\gamma_2}{x - e_2},$$

posto

$$\gamma_0 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{e_0 - e_2} - \frac{1}{e_1 - e_0}\right), \quad \gamma_1 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{e_1 - e_0} - \frac{1}{e_2 - e_1}\right),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{e_2 - e_1} - \frac{1}{e_0 - e_2}\right),$$

e quindi:

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

i quali risultati dimostrano la connessione fra il caso qui considerato e le ricerche del prof. FUCHS nella succitata Memoria (pag. 102).

6. La relazione (15) del n° 2, ossia la

$$p_r = (-1)^r \frac{K^r}{C^r} e^{r\int p dx} F_r(x), \tag{27}$$

conduce ad una formula ricorrente fra tre consecutivi covarianti associati, degna di considerazione. Differenziando infatti la superiore rispetto ad x si ottiene:

$$\frac{dp_r}{dx} = (-1)^r \frac{K^r}{C^r} e^{r\int p dx}\left[r p F_r(x) + \frac{dF_r(x)}{dx}\right];$$

ma si ha:

$$\frac{dF_r}{dx} = (n - r) F_{r+1} - r p F_r - r q F_{r-1}; \tag{28}$$

quindi sostituendo si avrà per la (27):

$$p_{r+1} = -\frac{K}{(n-r)C} e^{\int p\,dx}\left(\frac{dp_r}{dx} - \frac{rK}{C} e^{\int p\,dx} q\, p_{r-1}\right),$$

od osservando essere

$$(29) \qquad p_2 = \frac{K^3}{(n-1)C^2} q\, e^{2\int p\,dx},$$

si avrà la formola richiesta:

$$(30) \qquad p_{r+1} = -\frac{K}{(n-r)C} e^{\int p\,dx} \frac{dp_r}{dx} + \frac{r(n-1)}{(n-r)K} p_2 p_{r-1},$$

dalla quale, rammentando le $p_0 = K$, $p_1 = 0$, si dedurranno i valori di p_3, p_4, ... in funzione di p e di p_2 e dei loro differenziali rispetto ad x. Si hanno in questo modo le espressioni:

$$(31) \qquad \begin{cases} p_3 = -\dfrac{K}{(n-2)C} \dfrac{dp_2}{dx} e^{\int p\,dx}, \\ p_4 = \dfrac{K^2 e^{2\int p\,dx}}{(n-2)(n-3)C^2}\left(\dfrac{d^2 p_2}{dx^2} + p\dfrac{dp_2}{dx}\right) + 3\dfrac{n-1}{n-3}\dfrac{1}{K} p_2^2, \end{cases}$$

e così di seguito.

7. Supponiamo ora $n = 2$, e sia la forma quadratica

$$f(z_1, z_2) = a_0 z_1^2 + 2a_1 z_1 z_2 + a_2 z_2^2 = K.$$

Posto $\delta = \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}$, sarà $h = \frac{1}{2}(ff)^2 = -\delta^2$; quindi, essendo in generale $p_2 = fh = Kh$, si avrà, pel valore (26) di p_2:

$$q = -\frac{C^2 \delta^2}{K^2} e^{-2\int p\,dx},$$

per la quale la equazione differenziale (1) diventa:

$$(32) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} + p\frac{dv}{dx} - \frac{C^2\delta^2}{K^2} e^{-2\int p\,dx} v = 0,$$

che si integra tosto moltiplicandola pel fattore $\frac{dv}{dx} e^{2\int p\,dx}$ e dà gli integrali particolari:

$$v_1 = e^{m\int \varphi(x)dx}, \qquad v_2 = e^{-m\int \varphi(x)dx},$$

posto

$$e^{-\int p dx} = \varphi(x), \qquad \frac{C\delta}{K} = m.$$

Gli integrali υ_1, υ_2 saranno quindi algebrici se, oltre all'essere $\varphi(x)$ una funzione algebrica, sarà $\int \varphi(x)dx$ eguale al logaritmo di una funzione algebrica. Si avrà così il

TEOREMA.—*Se la forma $f(z_1, z_2) = K$ è quadratica, la espressione generale dell'equazione differenziale corrispondente è la (32).*

Gli integrali particolari υ_1, $\upsilon_2 = \frac{1}{\upsilon_1}$, della medesima sono algebrici, se le funzioni $\varphi(x)$, $e^{\int \varphi(x)dx}$ sono algebriche, e non lo ponno essere che in questo caso.

8. Sia in secondo luogo $n = 3$, e

$$f(z_1, z_2) = (a_0, a_1, a_2, a_3)(z_1, z_2)^3 = K.$$

Indicando con δ il discriminante della medesima si ha, come è noto:

$$\delta = a_0^2 a_3^2 + 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3;$$

quindi per la teorica dei covarianti associati:

$$f^6 \delta = p_0^2 p_3^2 + 4p_0 p_2^3,$$

dalla quale, per la prima delle (31), si deduce la

$$e^{2\int p dx}\left(\frac{dp_2}{dx}\right)^2 = \frac{C^2}{K^3}(-4p_2^3 + K^5\delta),$$

ossia, ponendo

$$p_2 = -K^2 y, \tag{33}$$

la

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3 + m^3}} = \frac{2C}{\sqrt{K}} e^{-\int p dx} dx,$$

essendo $m^3 = \frac{\delta}{4K}$. Sia $y = -m\omega^{\frac{1}{3}}$, quest'ultima equazione si trasforma nella

$$\frac{d\omega}{\omega^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\omega}} = -\frac{6C\sqrt{m}}{\sqrt{K}} e^{-\int p dx} dx, \tag{34}$$

e dalla relazione (33) si avrà:

$$4p_2^3 = \delta K^5 \omega;$$

ma: $p_2 = fh$, $f = K$; quindi:

$$4h^3(z_1, z_2) - \delta\omega f^2(z_1, z_2) = 0. \tag{35}$$

Supposto conosciuta p, la equazione differenziale (34) darà il valore di ω e quindi di y in funzione di x; dalla (33) si dedurrà il corrispondente valore di q, e la (35) sarà l'integrale della equazione differenziale (4) del n° 1. Se

$$\omega = x, \qquad 6C\sqrt{m} = -\sqrt{K},$$

si ha dalla (34):

$$p = \frac{1}{6}\frac{4-7x}{x(1-x)},$$

e quindi:

$$q = \frac{1}{18}\frac{1}{x(1-x)},$$

cioè i valori (5) di p, q nei quali $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{2}{3}$; come si è già dimostrato al n° 4.

9. Consideriamo in terzo luogo la forma biquadratica generale. Indicando come al n° 4 con g_2, g_3 i suoi invarianti, si avranno le

$$\begin{cases} f^4 g_2 = p_0 p_4 + 3p_2^2, \\ f^6 g_3 = p_0 p_2 p_4 - p_0 p_3^2 - p_2^3, \end{cases} \tag{36}$$

dalle quali:

$$f^4(g_2 p_2 - f^2 g_3) = 4p_2^3 + p_0 p_3^2,$$

o per la prima delle (31):

$$e^{2\int p dx}\left(\frac{dp_2}{dx}\right)^2 = 4\frac{C^2}{K^3}(-4p_2^3 + K^4 g_2 p_2 - K^6 g_3),$$

od infine, ponendo $p_2 = -K^2 y$, si giunge alla

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{2C}{\sqrt{K}} e^{-\int p dx} dx. \tag{37}$$

Se supponesi $y = x$, $2C = \sqrt{K}$, si ottengono le

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad q = -\frac{1}{32}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)},$$

come al n° 5.

10. Il valore del covariante $g_2 = \frac{1}{2}(ff)^4$ per una forma f d'ordine n essendo sempre dato della prima delle (36), si avrà in generale per le forme per le quali $g_2 = 0$, sostituendo nella medesima il valore (31) di p_4, la equazione differenziale

$$\frac{d^2 p_2}{dx^2} + p\frac{dp_2}{dx} + 6(n-2)^2\frac{C^2}{K^3}e^{-2\int p dx}p_2^2 = 0,$$

la quale si integra tosto moltiplicandola pel fattore $2\frac{dp_2}{dx}e^{2\int p dx}$ e dà:

$$e^{2\int p dx}\left(\frac{dp_2}{dx}\right)^2 + 4(n-2)^2\frac{C^2}{K^3}p_2^3 = D,$$

essendo D una nuova costante. Posto

$$p_2 = -K^2 y, \qquad D = 4(n-2)^2 C^2 K^3 m^3,$$

s'ottiene la

(38)
$$\frac{dy}{\sqrt{y^3+m^3}} = 2(n-2)\frac{C}{\sqrt{K}}e^{-\int p dx}dx.$$

Supponendo

$$y = -m x^{\frac{1}{3}}, \qquad 6(n-2)C\sqrt{m} = -\sqrt{K},$$

si avranno le

$$p = \frac{1}{6}\frac{4-7x}{x(1-x)}, \qquad q = \frac{n-1}{6^2(n-2)^2}\frac{1}{x(1-x)},$$

vale a dire le p, q hanno i valori (5) del n° 1, dove pongasi

$$\alpha = \frac{n-1}{6(n-2)}, \qquad \beta = -\frac{1}{6(n-2)}, \qquad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Ora, per le ricerche del signor Wedekind, la condizione $g_2 = 0$ non può essere soddisfatta che dalle forme degli ordini 4°, 6°, 12°; si avranno perciò nei tre casi:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{2}{3},$$

$$\alpha = \frac{5}{24}, \quad \beta = -\frac{1}{24}, \quad \gamma = \frac{2}{3},$$

$$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60}, \quad \gamma = \frac{2}{3},$$

come hanno dimostrato i signori Schwarz e Klein *).

*) Schwarz, Memoria citata; Klein, *Ueber lineare Differentialgleichungen* [Mathematische Annalen, t. XI (1877), pp. 115-118].

11. Nei seguenti paragrafi non supporremo più la forma f eguale ad una costante, ma bensì eguale ad una funzione algebrica $\varphi(x)$, la quale sia radice di una funzione razionale di x. Posto

$$\psi(x) = \frac{d \log \varphi(x)}{dx},$$

sarà quindi $\psi(x)$ una funzione razionale, e la forma $f(z_1, z_2)$ una *forma principale (Primform)* secondo la definizione del professore FUCHS *).

Si avranno in questo caso analogamente alle (9) del n° 2 le

$$f_1 = \frac{\varphi e^{\int p dx}}{C}\left(\frac{1}{n}\psi z_2 - \frac{dz_2}{dx}\right), \qquad f_2 = -\frac{\varphi e^{\int p dx}}{C}\left(\frac{1}{n}\psi z_1 - \frac{dz_1}{dx}\right),$$

le quali espressioni, sostituite nelle (14) del paragrafo stesso, dànno per un covariante associato p_r il valore:

$$p_r = \frac{\varphi^r e^{r\int p dx}}{C^r}\left[\left(\frac{\psi}{n}\right)^r \varphi - r\left(\frac{\psi}{n}\right)^{r-1} F_1 + \frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{\psi}{n}\right)^{r-2} F_2 - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (-1)^{r-1} r \frac{\psi}{n} F_{r-1} + (-1)^r F_r \right],$$

le funzioni $F_1, F_2, \ldots$ essendo le stesse che nei paragrafi precedenti. Sussisterà quindi per esse la proprietà indicata dalla equazione (28), la quale conduce ad una formola ricorrente analoga alla (30), cioè:

$$(39) \qquad p_{r+1} = -\frac{\varphi e^{\int p dx}}{(n-r)C}\left[\frac{dp_r}{dx} - \frac{(r+1)n - 2r}{n}\psi p_r\right] + \frac{r(n-1)}{n-r}\frac{1}{\varphi}p_2 p_{r-1},$$

essendo

$$(40) \qquad p_2 = \frac{\varphi^3 e^{2\int p dx}}{n^2(n-1)C^2}(\psi^2 + n\psi' + np\psi + n^2 q).$$

Osserviamo dapprima che p_2 è eguale al prodotto di φ^3 per una funzione razionale di x (ammesso lo siano le p, q, $e^{\int p dx}$) e che in conseguenza dalla (39) si ha tosto che un covariante p_r è eguale al prodotto di φ^{r+1} per una funzione razionale di x; si

*) FUCHS, Memoria citata, pag. 114.

avrà quindi per un invariante J qualsivoglia di grado m della forma $f(z_1, z_2) = \varphi$:

$$J = \varphi^m \Phi,$$

essendo Φ una funzione razionale di x. Si ha così il

Teorema. — *Indicando con J un invariante di grado m della forma principale f, dovrà essere la potenza m^{ma} di φ funzione razionale di x, oppure $J = 0$.*

Se la forma f è quadratica, l'unico invariante è il discriminante e si ha $m = 2$; in questo caso cioè è $\varphi^2(x)$ una funzione razionale come ha già dimostrato il sig. Fuchs *). Per una forma f del quarto ordine, essendo

$$g_2 = \varphi^2 \Phi, \qquad g_3 = \varphi^3 \Psi,$$

dovrà essere g_2 oppure g_3 eguale a zero; nel primo caso φ^3 funzione razionale, nel secondo φ^2. E così per una forma f di più alto ordine.

Una analoga proprietà ha luogo pei covarianti della forma f. Se $k(z_1, z_2)$ è un covariante di f ed il grado dei suoi coefficienti rispetto ai coefficienti della forma f è m, si ha:

$$k = \varphi^m \Phi.$$

12. La formola (39), allorquando pongasi

$$p_r = -\varphi^{\mu_r} y_r, \qquad \mu_r = \frac{(r+1)n - 2r}{n}, \tag{41}$$

si trasforma nella seguente:

$$y_{r+1} = -\frac{\varphi^{\frac{2}{n}} e^{\int p dx}}{(n-r)C}\frac{dy_r}{dx} - r\frac{n-1}{n-r} y_2 y_{r-1},$$

o sostituendo alla variabile x una variabile ω legata ad essa dalla relazione

$$\frac{Ce^{-\int p dx}}{\varphi^{\frac{2}{n}}} dx = d\omega, \tag{42}$$

nella

$$y_{r+1} = -\frac{1}{n-r}[y_r' + r(n-1) y y_{r-1}], \tag{43}$$

essendo $y_r' = \frac{dy_r}{d\omega}$ ed $y = y_2$. Si avranno così le

*) Fuchs, Memoria citata, pag. 117.

$$(44)\quad \begin{cases} y_3 = -\dfrac{1}{n-2}y', \\ y_4 = \dfrac{1}{(n-2)(n-3)}[y'' - 3(n-1)(n-2)y^2], \\ y_5 = -\dfrac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)}[y''' - 2(n-1)(5n-12)yy'], \\ y_6 = \dfrac{1}{(n-2)\ldots(n-5)}[y^{IV} - (n-1)(15n-44)yy'' \\ \qquad - 2(n-1)(5n-12)y'^2 + 15(n-1)^2(n-2)(n-4)y^3], \end{cases}$$

cioè le y_3, y_4, y_5, ... formate colla y ed i suoi coefficienti differenziali rispetto ad ω.

Notisi che, indicando con k un covariante qualsivoglia di ordine i e di grado j della forma f, si ha per un teorema rammentato più sopra che

$$\varphi^m k = \sum a p_0^{\alpha_0} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

essendo a un coefficiente numerico ed

$$m = \tfrac{1}{2}(nj - i), \qquad \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= j, \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n &= m. \end{aligned}$$

Ora, sostituendo alle p_0, p_2, ... i valori (41) ed indicando con ν l'esponente di φ nel secondo membro, si ha:

$$\nu = \alpha_0 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 + \cdots + \alpha_n\mu_n,$$

ossia pei valori (41) di μ_n e per le superiori:

$$\nu = m + \frac{i}{n}.$$

Si avrà quindi:

$$k = \varphi^{\frac{i}{n}} \sum a y_2^{\alpha_2} y_3^{\alpha_3} \ldots y_n^{\alpha_n},$$

ossia

Teorema. — *Un covariante qualsivoglia di ordine i della forma principale f potrà esprimersi col prodotto di $\varphi^{\frac{i}{n}}$ per una funzione razionale intera di y e dei suoi coefficienti differenziali rispetto ad ω. Per un invariante, essendo $i = 0$, mancherà il primo fattore.*

13. Vogliamo considerare in questo paragrafo le forme principali $f(z_1, z_2)$, per le quali il covariante $g_x = 0$ identicamente. Per determinare il valore di questo cova-

riante osserviamo che dalla prima delle (36) si ha:

$$\varphi^4 g_2 = p_0 p_4 + 3 p_2^2;$$

quindi pel teorema superiore:

$$g_2 = \varphi^{2\frac{n-4}{n}}(-y_4 + 3y^2),$$

o pel valore di y_4 (44):

$$g_2 = -\frac{\varphi^{2\frac{n-4}{n}}}{(n-2)(n-3)}[y'' - 6(n-2)^2 y^2].$$

La condizione $g_2 = 0$ equivale dunque alla

$$y'' - 6(n-2)^2 y^2 = 0,$$

equazione differenziale che integrata dà:

$$(45) \qquad y'^2 - 4(n-2)^2 y^3 = D,$$

D nuova costante. Si noti dapprima che, essendo $p_r = \varphi^{r+1} e^{r\int p dx} \Phi$, dove Φ è una funzione razionale di x, si avrà, per la prima delle (41):

$$y_r = -\varphi^{\frac{2r}{n}} e^{r\int p dx} \Phi;$$

ne consegue che, l'equazione (45) potendo scriversi

$$y_3^2 - 4y_2^3 = \frac{D}{(n-2)^2},$$

dovrà essere $\varphi^{\frac{12}{n}} e^{6\int p dx}$ una funzione razionale di x, e la n come è noto non potrà avere altri valori che 4, 6, 12. In secondo luogo, rammentando essere $p_2 = \varphi h$, $p_3 = \varphi \theta$, $\left[h = \frac{1}{2}(ff)^2, \ \theta = 2(fh)\right]$, quest'ultima equazione conduce alla

$$\theta^2 + 4h^3 = 4m^3 f^{6\frac{n-2}{n}},$$

posto $D = 4m^3(n-2)^2$; e quindi si avranno:

per		
$n = 4$,	$n = 6$,	$n = 12$,
$4m^3 = -g_3$,	$4m^3 = -\frac{1}{18}A$,	$4m^3 = \frac{1}{180}\sqrt{\frac{7}{6}A}$,

essendo A i rispettivi invarianti quadratici *); e la prima delle (41) darà nei tre casi le

$$(46)\quad 4h^3 = g_3\left(\frac{y}{m}\right)^3 f^3;\quad 4h^3 = \frac{1}{18} A\left(\frac{y}{m}\right)^3 f^4;\quad 4h^3 = -\frac{1}{180}\sqrt{\frac{7}{6}A}.\left(\frac{y}{m}\right)^3 f^5,$$

essendo y la funzione di ω (e quindi di x) dedotta dalla (45).

La equazione stessa (45) dà infine, ponendo $\left(\frac{y}{m}\right)^3 = -t$:

$$(47)\qquad \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-t}} = -6(n-2)\sqrt{m}\,d\omega = -6(n-2)\,C\sqrt{m}\,\frac{e^{-\int p dx}}{\sqrt[6]{\rho(x)}}\,dx,$$

nella quale $\rho(x) = \varphi^{\frac{12}{n}}$.

Se nella equazione superiore si suppone

$$t = x,\qquad p = \frac{1}{6}\,\frac{4-7x}{x(1-x)},$$

si ha evidentemente che $\rho(x)$ è una costante; vale a dire, nei tre casi considerati la forma principale $f(z_1, z_2)$ è eguale ad una costante **), se $\left(\frac{y}{m}\right)^3 = -x$ e le p, q hanno i valori del n° 10; in queste ipotesi le (46) sono integrali algebrici razionali della equazione differenziale (6) nella quale si pongano per λ, μ, ν i rispettivi valori.

Da ultimo osservando che dalle due relazioni (n° 2)

$$z_2\frac{dz_1}{dx} - z_1\frac{dz_2}{dx} = z_2^2\frac{dz}{dx} = Ce^{-\int p dx},$$

$$f(z_1, z_2) = z_2^n f(z) = \varphi(x)$$

deducesi la

$$\frac{dx}{f^{\frac{2}{n}}(z)} = C\,\frac{e^{-\int p dx}}{\sqrt[6]{\rho(x)}}\,dx,$$

si avrà, per la (47), che

$$\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-t}} = -6(n-2)\sqrt{m}\,\frac{dz}{f^{\frac{2}{n}}(z)},$$

*) Vedi una mia lettera al sig. KLEIN, *Extrait d'une lettre de* M. F. BRIOSCHI *à* M. F. KLEIN [Mathematische Annalen, t. XI (1877), pp. 111-114].

**) KLEIN, *Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder* [Sitzungsberichte der physicalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, t. IX (1877), pp. 16-29, 70-83, 179-182].

la quale dimostra che gli integrali $\int \frac{dz}{f^{\frac{2}{n}}(z)}$, nella supposizione che per la forma f sussista identicamente la proprietà $g_2 = 0$, sono riducibili ad integrali ellittici *).

14, 18 dicembre 1876.

[G.].

*) Schwarz, Memoria citata, pp. 327-330.

CXX.

DI UNA NUOVA EQUAZIONE DIFFERENZIALE NELLA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume X (1877), pp. 417-421.

1. JACOBI nel capitolo « *De æquationum modularium affectibus* » dei *Fundamenta nova* *) così si esprime al § 32: « At inter affectus æquationum modularium id maxime memorabile ac singulare mihi videor animadvertere, *quod eidem omnes æquationi differentiali tertii ordinis satisfaciunt* ».

Ed invero l'esistenza di un'unica equazione differenziale del terzo ordine fra i moduli λ, k, qualunque sia l'ordine della trasformazione e quindi qualunque sia il grado della relazione algebrica fra λ e k, è un fatto di cui la importanza analitica non ebbe forse ancora tutto lo sviluppo che merita.

Le ricerche da me da lungo tempo intraprese sulle proprietà del moltiplicatore, nella trasformazione delle funzioni ellittiche, mi hanno recentemente condotto a stabilire una equazione differenziale del *quarto ordine* fra il moltiplicatore ed il modulo k, la quale sussiste qualunque sia l'ordine della trasformazione ed è quindi affatto analoga a quella di JACOBI sopra rammentata. La calcolazione di questa equazione forma lo scopo principale della presente Nota.

*) *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum, auctore* D. CAROLO GUSTAVO JACOBO JACOBI, Regiomonti 1829.

2. Dalle due equazioni differenziali del secondo ordine

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + P\frac{dv}{dz} + Qv = 0, \tag{2}$$

nelle quali p, q sono funzioni della variabile x, e P, Q funzioni della quantità z, funzione essa stessa di x; se poniamo $y = wv$, essendo w una funzione di x, e sostituiamo questo valore di y nella equazione differenziale (1), si ottiene una equazione differenziale, la quale, dovendo essere identica alla (2), dà luogo alle due relazioni *):

$$\left\{\begin{aligned} & w\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\frac{dw}{dx}\frac{dz}{dw} + pw\frac{dz}{dx} = Pw\left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \\ & \frac{d^2 w}{dx^2} + p\frac{dw}{dx} + qw = Qw\left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dividendo la prima di queste per $w\frac{dz}{dx}$ si ha:

$$\frac{d\log\frac{dz}{dx}}{dx} = P\frac{dz}{dx} - 2\frac{d\log w}{dx} - p, \tag{4}$$

la quale derivata nuovamente rispetto ad x conduce alla

$$\frac{d^2\log\frac{dz}{dx}}{dx^2} = \left(\frac{dP}{dz} + P^2\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 2P\frac{d\log w}{dx}\frac{dz}{dx} - Pp\frac{dz}{dx} - 2\frac{d^2\log w}{dx^2} - \frac{dp}{dx}. \tag{5}$$

Formando ora colle (4), (5) la espressione

$$\frac{d^2\log\frac{dz}{dx}}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\frac{dz}{dx}}{dx}\right)^2 = [z]_x,$$

si ottiene, dopo alcune riduzioni avuto riguardo alla seconda delle (3), la equazione differenziale del terzo ordine

$$[z]_x = \frac{1}{2}Z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}X, \tag{6}$$

*) KUMMER, *De generali quadam æquatione differentiali tertii ordinis*, Programm des evangelischen Königl. und Stadtgymnasiums in Liegnitz vom Jahre 1834. [Vedi anche: Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. C (1887), pp. 1-9].

posto

$$Z = 2\frac{dP}{dz} + P^2 - 4Q, \quad X = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q,$$

la quale equazione coincide con quella di JACOBI, se

$$(7) \quad \begin{cases} P = \dfrac{1 - 3z^2}{z(1 - z^2)}, & p = \dfrac{1 - 3x^2}{x(1 - x^2)}, \\ Q = -\dfrac{1}{1 - z^2}, & q = -\dfrac{1}{1 - x^2}, \end{cases}$$

e le z, x tengono il posto dei moduli λ, k. La quantità w, eliminando la quale dalle (3) si ottenne la (6), è in questo caso il moltiplicatore.

3. La eliminazione della z dalle relazioni (3) non si può evidentemente eseguire, finchè non sia noto come le P, Q sono formate colla z stessa; essa però si può ottenere in un caso abbastanza generale, che comprende fra gli altri quello che intendiamo qui considerare.

Osserviamo dapprima che la equazione (4) integrata dà:

$$(8) \qquad w^2 \frac{dz}{dx} e^{\int p dx} = c e^{\int P dz},$$

essendo c una costante arbitraria. Quindi, indicando con L la seguente funzione di x:

$$(9) \qquad L = e^{2\int p dx} w^3 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + p \frac{dw}{dx} + q w \right),$$

si ha per la seconda delle (3):

$$(10) \qquad L = e^{2\int p dx} . Q w^4 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2,$$

ossia per la (8):

$$L = c^2 Q e^{2\int P dz}.$$

Da questa si deducono differenziando le seguenti:

$$\frac{d \log L}{dx} = \left(\frac{d \log Q}{dz} + 2P \right) \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2 \log L}{dx^2} = \left(\frac{d^2 \log Q}{dz^2} + 2\frac{dP}{dz} \right) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d \log Q}{dz} + 2P \right) \frac{d^2 z}{dx^2},$$

alla seconda delle quali aggiungendo la prima moltiplicata per p, avuto riguardo alla

prima delle (3), si ottiene:

$$\frac{d^2 \log L}{dx^2} + \left(p + 2\frac{d \log w}{dx}\right)\frac{d \log L}{dx} = \left(\frac{d^2 \log Q}{dz^2} + P\frac{d \log Q}{dz} + 2\frac{dP}{dz} + 2P^2\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

Ora, se i valori delle P, Q sono tali che il coefficiente di $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ nel secondo membro risulti eguale a mQ, essendo m un coefficiente numerico, si avrà per la (10) che il secondo membro stesso risulterà eguale a

$$m e^{-2\int p dx} \frac{L}{w^4},$$

funzione della sola x, e si otterrà l'equazione differenziale del quarto ordine

$$(11) \qquad \frac{d^2 \log L}{dx^2} + \left(p + 2\frac{d \log w}{dx}\right)\frac{d \log L}{dx} - m\frac{L}{w^4}e^{-2\int p dx} = 0$$

fra w ed x.

La equazione di condizione

$$\frac{dR}{dz} + PR = mQ,$$

posto $R = \frac{d \log Q}{dz} + 2P$, è evidentemente soddisfatta dai valori (7) delle P, Q allorquando sia $m = 8$. La equazione differenziale del quarto ordine (11) sarà quindi in questo caso la equazione cercata fra il moltiplicatore w ed il modulo x.

Osserviamo altresì che, ponendo

$$P = \frac{\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)z}{z(1 - z)}, \qquad Q = \frac{-\alpha'\beta'}{z(1 - z)},$$

ed $m = 8$, quella equazione di condizione è soddisfatta dai valori:

$$\alpha' = \beta' = \tfrac{1}{2}, \qquad \gamma' = 1;$$

$$\alpha' = \beta' = \tfrac{1}{4}, \qquad \gamma' = 1;$$

$$\alpha' = \beta' = \tfrac{1}{4}, \qquad \gamma' = \tfrac{1}{2};$$

ed in conseguenza, se

$$p = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1 - x)}, \qquad q = \frac{-\alpha\beta}{x(1 - x)},$$

la equazione (11) sarà integrabile per mezzo di serie ipergeometriche.

4. La equazione (11), posto $m = 8$, può trasformarsi nel modo seguente. Si indichino con u e θ due funzioni di x legate alle w, L dalle relazioni

$$w = ue^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}, \qquad \theta = \frac{L}{u^4},$$

si avrà dapprima in luogo della (11) la

$$\frac{d^2 \log\theta}{dx^2} + 2\frac{d\log u}{dx}\frac{d\log\theta}{dx} - 4\frac{d^2\log u}{dx^2} + 2X = 0,$$

mentre il valore (9) di L darà:

$$\theta = \frac{1}{u}\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{4}X,$$

essendo nell'una e nell'altra equazione

$$X = 2\frac{dp}{dx} + p^2 - 4q,$$

come al n° 2. Se infine osservasi che per l'equazione (10) si ha:

$$\theta = Q\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

si ha, rammentando i valori (7), il seguente

TEOREMA. — *Indicando, come nei «Fundamenta nova», con M il moltiplicatore, con λ, k i due moduli, posto*

$$u = M\sqrt{k(1-k^2)},$$

$$\theta = \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dk^2} + \frac{1}{4}\frac{(1+k^2)^2}{k^2(1-k^2)^2},$$

il moltiplicatore M soddisfa, per una trasformazione di ordine qualsivoglia, la equazione differenziale del quarto ordine che si otterrà sostituendo il valore di θ nella

$$\frac{d^2\log\theta}{dk^2} + 2\frac{d\log u}{dk}\frac{d\log\theta}{dk} - 4\frac{d^2\log u}{dk^2} - 2\frac{(1+k^2)^2}{k^2(1-k^2)^2} = 0, \tag{12}$$

e si avrà inoltre qualunque sia l'ordine della trasformazione:

$$\theta = -\frac{1}{1-\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dk}\right)^2.$$

Per la trasformazione del secondo ordine, per esempio, essendo

$$M = \frac{1}{1+k'}, \qquad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'},$$

si hanno le

$$2kk'^2 \frac{d \log u}{dk} = -1 + 2k' - k^2,$$

$$2k^2k'^4 \frac{d^2 \log u}{dk^2} = 1 - 4k^2 - k^4 - 2k'(1-2k^2);$$

quindi:

$$\theta = -\frac{1-k'}{k'^3(1+k')},$$

$$kk'^2 \frac{d \log \theta}{dk} = 2k' + 3k^2,$$

$$k^2k'^4 \frac{d^2 \log \theta}{dk^2} = 3k^2(1+k^2) - 2k'(1-2k^2),$$

i quali valori soddisfano appunto la equazione (12).

5 luglio 1877.

[G.].

CXXI.

UN TEOREMA NELLA TEORICA DELLE SOSTITUZIONI.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XII (1879), pp. 483-485.

Se con n si indica un numero primo, e con $z_0, z_1, \ldots z_r, \ldots z_{n-1}$ un sistema di n lettere, ogni sostituzione fra le medesime potrà rappresentarsi analiticamente nel modo che segue:

$$\begin{bmatrix} z_r \\ z_{\varphi(r)} \end{bmatrix}$$

oppure colla sola $z_{\varphi(r)}$, od anche più semplicemente con $\varphi(r)$. È noto che la funzione φ dell'indice r può ridursi alla forma

$$\varphi(r) \equiv \alpha\,\theta(r+p) + \beta, \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

nella quale $\alpha = 1, 2, \ldots n-1$ e p, β ponno assumere i valori $0, 1, \ldots n-1$. La forma *ridotta* $\theta(r)$ è un polinomio di grado non superiore ad $n-2$, nel quale il coefficiente del primo termine è l'unità, e quello del secondo lo zero.

Il numero delle funzioni $\theta(r)$ è

$$M = \frac{1.2.3\ldots(n-2)-1}{n} + 1.$$

Considero ora la forma ridotta

$$\theta(r) \equiv r^{n-2} + a\,r^{\frac{n-1}{2}} + b\,r, \quad (\mathrm{mod}\, n).$$

Il quadrato di essa dà:

$$\theta^2(r) \equiv r^{n-3} + (a^2 + 2b) r^{n-1} + 2a[r^{\frac{1}{2}(n-3)} + b r^{\frac{1}{2}(n+1)}] + b^2 r^2,$$

e quindi, dovendo essere $\sum \theta^2(r) \equiv 0 \pmod{n}$, sarà:

$$(1) \qquad a^2 + 2b \equiv 0, \text{ ossia } b \equiv \frac{n-1}{2} a^2, \pmod{n}.$$

Formando il quadrato di $\theta^2(r)$, si ottiene:

$$\theta^4(r) \equiv r^{n-5} + 2(3a^2 + 2b) r^{n-3} + (a^4 + 12a^2 b + 6b^2) r^{n-1} + 2b^2(3a^2 + 2b) r^{n+1}$$

$$+ 4a[r^{\frac{1}{2}(n-7)} + (a^2 + 3b) r^{\frac{1}{2}(n-3)} + b(a^2 + 3b) r^{\frac{1}{2}(n+1)} + b^3 r^{\frac{1}{2}(n+5)}] + b^4 r^4,$$

e per la $\sum \theta^4(r) \equiv 0 \pmod{n}$ dovrà essere congruente a zero il coefficiente di r^{n-1}, ossia dovrà in generale essere

$$(2) \qquad a^4 + 12a^2 b + 6b^2 \equiv 0, \pmod{n};$$

salvo il caso in cui $n = 7$, nel quale devesi tener conto dei coefficienti di $r^{\frac{1}{2}(n-7)}$ e di $r^{\frac{1}{2}(n+5)}$, e quindi sarà

$$(3) \qquad a^4 + 12a^2 b + 6b^2 + 4a(1 + b^3) \equiv 0, \pmod{7}.$$

Ora la congruenza (2), per la (1), si riduce alla

$$2b(b + 4a^2) \equiv 0, \pmod{n},$$

la quale per lo stesso valore di b dato dalla (1) non può essere soddisfatta se non supponendo $n = 7$, valore di n escluso dalla (2).

Ma, se $n = 7$ e quindi per la (1):

$$b \equiv 3a^2, \qquad b^2 \equiv 2a^4, \qquad b^3 \equiv 6a^6 \equiv 6,$$

si hanno le

$$b + 4a^2 \equiv 0, \quad 1 + b^3 \equiv 0, \pmod{7},$$

cioè la (3) è soddisfatta. Si ha così il teorema:

La forma ridotta

$$\theta(r) \equiv r^{n-2} + a r^{\frac{n-1}{2}} + b r, \pmod{n}$$

non può sussistere se non nel solo caso in cui $n = 7$; ed in questo si ha $b \equiv 3a^2 \pmod{7}$, essendo a qualunque.

Come è noto, questa forma ridotta per $n = 7$ è dovuta al sig. HERMITE *). La forma ridotta seguente, di cui la superiore è un caso particolare:

$$\theta(r) \equiv r^{n-s} + a r^{\frac{n-s+1}{2}} + r, \quad (\bmod n)$$

dà luogo ad altri teoremi simili che si dimostrano formando le potenze s, $2s$ di $\theta(r)$.

5 giugno 1879.

[Ca.].

*) HERMITE, *Sur les fonctions de sept lettres* [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LVII (1863), pp. 750-757].

CXXII.

SOPRA UN PROBLEMA D'ANALISI.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XVII (1884), pp. 401-406.

1. Date le cinque espressioni dei tre argomenti x_1, x_2, x_3:

$$v = x_1 x_2 x_3, \qquad f = x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2,$$
$$l = x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 + x_1^2 x_2^3,$$
$$m = x_2 x_3^5 + x_3 x_1^5 + x_1 x_2^5,$$
$$n = x_1^7 + x_2^7 + x_3^7,$$

fra le quali dovranno sussistere due relazioni, determinare i valori degli argomenti x_1, x_2, x_3 in funzione di tre fra le espressioni stesse.

Le relazioni che sussistono fra le v, f, l, m, n sono le seguenti:

$$(1) \qquad \begin{cases} vn + l^2 - fm - fv^2 = 0, \\ ln - m^2 - 3v^2 m - 9v^4 + 5fvl - f^3 = 0, \end{cases}$$

dalle quali eliminando n si ottiene la

$$(2) \qquad l^3 - f(m + 6v^2)l + v(m^2 + 3v^2 m + 9v^4 + f^3) = 0,$$

che dimostra essere la l una funzione delle v, f, m.

Posto ora

$$a = x_2^3 x_3, \qquad b = x_3^3 x_1, \qquad c = x_1^3 x_2,$$

la equazione del terzo grado che ha per radici le a, b, c è la

$$x^3 - f x^2 + v l x - v^4 = 0,$$

e questa dà, avuto riguardo al valore superiore di l^3, per a, b, c i seguenti valori:

$$(3)\qquad \begin{cases} a = \frac{1}{3} f + \frac{1}{\sqrt{-3}}(R + S), \\[2ex] b = \frac{1}{3} f + \frac{1}{\sqrt{-3}}(\rho^2 R + \rho S), \\[2ex] c = \frac{1}{3} f + \frac{1}{\sqrt{-3}}(\rho R + \rho^2 S), \end{cases}$$

essendo

$$2\rho + 1 = \sqrt{-3},$$

$$R^3 = \frac{1}{3\sqrt{-3}} f^3 - m v^2 + 3\rho^2 v^4 - \rho^2 f v l,$$

$$S^3 = \frac{1}{3\sqrt{-3}} f^3 + m v^2 - 3\rho v^4 + \rho f v l,$$

da cui $R S = v l - \frac{1}{3} f^2$.

Ma dai valori delle a, b, c si deducono tosto le

$$v^3 x_1^7 = b c^3, \qquad v^3 x_2^7 = c a^3, \qquad v^3 x_3^7 = a b^3;$$

si avranno cioè la

$$v^3 x_1^7 = b (f c^2 - v l c + v^4),$$

e le analoghe, ossia sostituendo nelle medesime i valori trovati per a, b, c si giungerà alle seguenti:

$$(4)\qquad \begin{cases} 3 v^3 x_1^7 = A + B R + C S + \frac{1}{3} f^2 (\rho R^2 + \rho^2 S^2), \\[1ex] 3 v^3 x_2^7 = A + \rho^2 B R + \rho C S + \frac{1}{3} f^2 (\rho^2 R^2 + \rho S^2), \\[1ex] 3 v^3 x_3^7 = A + \rho B R + \rho^2 C S + \frac{1}{3} f^2 (R^2 + S^2), \end{cases}$$

nelle quali:

$$A = v^2 (f m + f v^2 - l^2) = v^3 n,$$

$$B = \frac{1}{3\sqrt{-3}} \rho^2 f^3 + \frac{1}{\sqrt{-3}} \rho f v l + v^2 (m - v^2 \sqrt{-3}),$$

$$C = \frac{1}{3\sqrt{-3}} \rho f^3 + \frac{1}{\sqrt{-3}} \rho^2 f v l - v^2 (m + v^2 \sqrt{-3});$$

si avranno cioè i valori delle x_1, x_2, x_3 in funzione delle v, f, m.

2. La forma ternaria del quarto ordine che abbiamo indicato con f ha tre covarianti degli ordini 6°, 14°, 21°, i quali rappresenteremo con h, k, δ. I valori dei covarianti stessi si ponno esprimere in funzione delle v, f, l, m, n nel modo seguente *):

$$h = 5v^2 - m,$$

$$k = n^2 - 10fvn - 232vlm + 40fl^2 - 1192v^3l + 465f^2v^2,$$

$$\delta = -n^3 - 21fvn^2 - 119f^2v^2n + 28f^2mn + 11696fv^2lm$$
$$+ 264flm^2 + 96f^3vm - 2432f^2vl^2 + 52936fv^4l + 32f^4l$$
$$- 6935f^3v^3 - 4v(129m^3 + 3534v^2m^2 + 14128v^4m + 31371v^6).$$

Ora, essendo per la prima di esse

$$m = 5v^2 - h,$$

si dedurrà dalla prima delle relazioni (1) che

$$vn = -l^2 + f(6v^2 - h),$$

pei quali valori le k, δ si possono ridurre ad essere funzioni di v, f, h e di l. La eliminazione di l da queste ultime condurrà quindi ad una equazione fra le v, f, h, k, δ.

Per giungere a questa equazione si osservi che i valori di k, δ, per le due ultime relazioni, e per la (2), si trasformano come segue:

$$(5)\quad \begin{cases} v^2k = (7^2v^2 + h)fl^2 - Mvl + f^2(h^2 - 2v^2h + 9\cdot7^2v^4), \\ v^3\delta = -f(7^2v^2 - h)[(7^2v^2 + h)fl^2 - Mvl] \\ \qquad + f^3(h^3 - 9h^2v^2 + 7^2hv^4 - 3\cdot7^4v^6) + Nv^2, \end{cases}$$

posto per brevità

$$M = h^2 - 5\cdot7^2hv^2 + 7^4v^4 + f^3,$$

$$N = h^4 + 70\cdot7h^3v^2 - 63\cdot7^3h^2v^4 + 14\cdot7^5hv^6 - 7^7v^8 + f^6,$$

mentre la (2) diventa la

$$(6)\qquad l^3 - f(11v^2 - h)l + vL = 0,$$

essendo

$$L = h^2 - 13hv^2 + 7^2v^4 + f^3.$$

*) Vedi la mia nota: *Ueber die* JACOBI'*sche Modulargleichung vom achten Grade* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 241-250].

Perciò dalla eliminazione di l dalle (5) si otterrà la richiesta equazione fra le v, f, h, k, δ; ossia la

$$(7)\quad \begin{cases} z^8 - 14hz^6 + 21(3h^2 - 2f)z^4 - 7(10h^3 - 10f^3h - fk)z^2 \\ \qquad + \delta z - 7(h^4 + 42f^3h^2 + fhk + f^6) = 0, \end{cases}$$

nella quale $z = 7v$; e la eliminazione delle l, v dalle equazioni (5), (6) darà una relazione fra le quattro forme f, h, k, δ, delle quali sono funzioni intiere e razionali i coefficienti della superiore equazione dell'ottavo grado in z. Questa relazione è la seguente *):

$$(8)\quad \begin{cases} \delta^2 = k^3 - 16f^2hk^2 + 16f(63h^4 - 88f^3h^2 - 16f^6)k \\ \qquad - 1024f^3h(35h^4 - 11f^3h^2 + 8f^6) + 12^3h^7. \end{cases}$$

3. Sieno y_1, y_2, y_3 valori di x_1, x_2, x_3 che annullano f e rendono $h = 1$ **). Si indichino con $u, \lambda, \mu, \nu; \alpha, \beta, \gamma$ i valori di $v, l, m, n; a, b, c$ corrispondenti alle y_1, y_2, y_3. Essendo $\mu = 5u^2 - 1$, si dedurranno dalle (3) le

$$(9)\quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{-3}}(R_0 + S_0),\quad \beta = \frac{1}{\sqrt{-3}}(\rho^2 R_0 + \rho S_0),\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{-3}}(\rho R_0 + \rho^2 S_0),$$

essendo

$$R_0^3 = u^2(p^2u^2 + 1),\qquad S_0^3 = -u^2(q^2u^2 + 1),$$

$$p = 3\rho + 1,\qquad q = 3\rho^2 + 1;$$

inoltre le (4) daranno le seguenti:

$$(10)\quad \begin{cases} 3uy_1^7 = -\lambda^2 + (2\rho^2pu^2 - 1)R_0 - (2\rho qu^2 - 1)S_0, \\ 3uy_2^7 = -\lambda^2 + \rho^2(2\rho^2pu^2 - 1)R_0 - \rho(2\rho qu^2 - 1)S_0, \\ 3uy_3^7 = -\lambda^2 + \rho(2\rho^2pu^2 - 1)R_0 - \rho^2(2\rho qu^2 - 1)S_0. \end{cases}$$

Infine dalle (5), (6) si hanno le

$$uk_0 = -M_0\lambda,\qquad u\delta_0 = N_0,\qquad \lambda^3 = -uL_0,$$

---

*) P. GORDAN, *Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form*

$$f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1,$$

Mathematische Annalen, t. XVII (1880), pp. 359-378 [p. 366].

**) La sussistenza di questi valori è dimostrata nella mia Memoria: *Sulla teoria delle funzioni ellittiche* [LXXVI: t. II, pp. 295-318].

posto $y = 7u$ e

$$7^2 L_0 = y^4 - 13y^2 + 49, \qquad M_0 = y^4 - 5y^2 + 1,$$
$$7 N_0 = -(y^8 - 14y^6 + 63y^4 - 70y^2 - 7),$$

essendo k_0, δ_0 i valori dei covarianti k, δ, per la forma ternaria in y_1, y_2, y_3. Ora per la relazione (8) si ha che

$$\delta_0^2 = k_0^3 + 12^3;$$

quindi, posto $k_0^3 = -12^3 x$, sarà: $\delta_0^2 = 12^3(1 - x)$, ossia si avranno fra le x, y le equazioni:

$$(11) \qquad x = -\frac{7^2 L_0 M_0^3}{12^3 y^2}, \quad 1 - x = \frac{7^2 N_0^2}{12^3 y^2},$$

le quali, come è noto, sono due forme differenti dell'equazione modulare Jacobiana dell'ottavo grado.

4. Suppongasi col signor KLEIN *) che fra le x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 sussista la relazione

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0;$$

da essa ricavasi facilmente essere anche

$$x_1^7 y_1^7 + x_2^7 y_2^7 + x_3^7 y_3^7 + 7uv(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0;$$

perciò, se introduciamo le seguenti denominazioni:

$$x_1^7 + \rho^2 x_2^7 + \rho x_3^7 = n_1, \qquad x_1^7 + \rho x_2^7 + \rho^2 x_3^7 = n_2,$$
$$a + \rho^2 b + \rho c = f_1, \qquad a + \rho b + \rho^2 c = f_2,$$

la equazione superiore si trasformerà per le (9), (10) nella seguente:

$$(12) \qquad -\lambda^2 n + t_1 R_0 - t_2 S_0 = 0,$$

posto

$$t_1 = g_1 u^2 - n_1, \qquad t_2 = g_2 u^2 - n_2,$$
$$g_1 = p(2\rho^2 n_1 - q\sqrt{-3}.vf_1), \qquad g_2 = q(2\rho n_2 + p\sqrt{-3}.vf_2).$$

Dalla equazione (12), rammentando essere $u\lambda = R_0 S_0$ e quindi

$$\lambda^3 = -u(p^2u^2 + 1)(q^2u^2 + 1),$$

*) KLEIN, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 251-282].

si deduce tosto la seguente:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} & -n^3(p^2u^2+1)^2(q^2u^2+1)^2+t_1^3(p^2u^2+1) \\ & +t_2^3(q^2u^2+1)+3nt_1t_2(p^2u^2+1)(q^2u^2+1)=0, \end{aligned}\right.$$

si ottiene cioè una equazione del quarto grado in u^2, i coefficienti della quale sono funzioni intiere e razionali delle espressioni v, f, l, m, n. Infatti dalle relazioni (4) e dalle (3) si hanno le

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} & v^3n_1=CS+\tfrac{1}{3}\rho f^2R^2, \qquad v^3n_2=BR+\tfrac{1}{3}\rho^2f^2S^2, \\ & \quad f_1=-S\sqrt{-3}, \qquad f_2=-R\sqrt{-3}, \end{aligned}\right.$$

le quali appunto dimostrano che t_1^3, t_2^3, t_1t_2 sono funzioni intiere, razionali di quelle cinque espressioni.

Riserviamo a una prossima comunicazione la dimostrazione di altre proprietà dell'equazione del quarto grado (13) e l'uso di essa nella risoluzione della equazione dell'ottavo grado (7).

17 aprile 1884.

[G.].

CXXIII.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XX (1887), pp. 364-370.

1. In un recente scritto che ha per titolo: *Ueber Gleichungen fünften Grades* *) il prof. GORDAN ha fatto conoscere un metodo di trasformazione della equazione generale del quinto grado alla forma *normale*, degno di considerazione sotto varî aspetti. È noto che questa forma normale è la seguente:

$$F(z) = z^5 - 10z^3 + 45z + C = 0;$$

ora il prof. GORDAN osserva che per le radici di essa sussistono le quattro relazioni:

$$\sum \frac{1}{z+\sqrt{3}} = 0, \qquad \sum \frac{1}{z-\sqrt{3}} = 0,$$

$$\sum \frac{1}{(z+\sqrt{3})^2} = 0, \qquad \sum \frac{1}{(z-\sqrt{3})^2} = 0,$$

le sommatorie estendendosi alle cinque radici della equazione $F(z) = 0$.

Sia

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_4)$$

una equazione generale del quinto grado, e posto $z = g(x)$, nella quale z, x sono due

*) Mathematische Annalen, t. XXVIII (1887), pp. 152-166.

radici corrispondenti, trattasi di determinare la funzione $g(x)$ per modo che sieno soddisfatte le quattro relazioni superiori.

Il metodo di GORDAN è suscettibile di applicazione anche ad equazioni di più alto grado, della quale sua proprietà già faceva cenno, per le equazioni del settimo grado, il prof. KLEIN *) in un suo lavoro pubblicato pochi mesi dopo quello del sig. GORDAN.

In questa comunicazione all'Istituto Lombardo è mio intendimento di esporre il metodo in tutta la sua generalità, ricercando in seguito quale partito si possa dedurre da esso nella trasformazione delle equazioni del settimo grado.

2. Sieno $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ le radici di una equazione dell'n^{mo} grado

$$f(x) = 0,$$

e supponiamo, per brevità delle formole non per necessità di metodo, essere

$$\sum x = 0.$$

Posto $s_r = \sum x^r$, considero le $n - 1$ funzioni seguenti di una qualsivoglia radice x:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x) = x^2 + \rho x - \frac{1}{n} s_2, \\ \varphi_1(x) = x^3 + \rho_1 x - \frac{1}{n} s_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-3}(x) = x^{n-1} + \rho_{n-3} x - \frac{1}{n} s_{n-1}. \end{cases}$$

Evidentemente queste funzioni soddisfano alle equazioni:

$$(2) \qquad \sum \varphi(x) = 0, \quad \sum \varphi_1(x) = 0, \quad \ldots \sum \varphi_{n-3}(x) = 0.$$

Dispongasi ora dei coefficienti indeterminati $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-3}$ affinchè sieno soddisfatte anche le equazioni:

$$(3) \qquad \sum \varphi^2(x) = 0, \quad \sum \varphi(x)\varphi_1(x) = 0, \quad \ldots \sum \varphi(x)\varphi_{n-3}(x) = 0;$$

la prima darà una equazione del secondo grado per determinare ρ, le altre delle equa-

*) KLEIN, *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades* [Mathematische Annalen, t. XXVIII (1887), pp. 499-532]. Vedi anche: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig 1884, pag. 239.

zioni lineari, da cui deduconsi i valori di $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-3}$. Indicando con R_m la espressione

$$R_m = s_3 s_{m+3} - s_2 s_{m+4} + \frac{1}{n} s_2^2 s_{m+2}, \tag{4}$$

i valori di $\rho, \rho_1, \dots$ sono i seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho s_2 + s_3 &= R, \\ \rho_m s_2 + s_{m+3} &= \frac{R_m}{R}, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

nelle quali $R = \pm \sqrt{R_0}$ e nella seconda deve porsi $m = 1, 2, \dots n - 3$. Dalle equazioni (1) deducesi così essere

$$\sum x \varphi(x) = R, \qquad \sum x \varphi_m(x) = \frac{R_m}{R}. \tag{6}$$

Supponendo $r, s = 1, 2, \dots n - 3$, indicherò con a_{rs} le espressioni

$$a_{rs} = \sum \varphi_r(x) \varphi_s(x). \tag{7}$$

Ciò posto, considero il determinante dell'ordine n^{mo} che ottiensi dalla matrice

$$|1, x, \varphi(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_{n-3}(x)|$$

ponendo $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ in luogo di x. Per la forma delle funzioni $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, ... questo determinante si vede tosto essere eguale a quello che si ha dalla matrice

$$|1, x, x^2, \dots x^{n-1}|$$

colla stessa sostituzione, cioè, indicando con D il discriminante di $f(x)$, sarà quel primo determinante eguale a $D^{\frac{1}{2}}$.

Faccio ora il quadrato dello stesso determinante, tenendo presenti le relazioni (2), (3), (6), (7) sussistenti fra gli elementi delle colonne, si ottiene facilmente essere

$$D = - n R^2 . A \tag{8}$$

essendo A il determinante dell'ordine $n - 3$:

$$A = \sum (\pm a_{11} a_{22} \dots a_{n-3, n-3}).$$

Questa relazione fra il determinante A ed il discriminante D è fondamentale nel metodo di trasformazione che qui si considera.

Sostituendo nella (7) per $\varphi_r(x)$, $\varphi_s(x)$ i loro valori, si ottiene per a_{rs} il seguente:

$$a_{rs} = \frac{1}{s_2}\left(\frac{R_r R_s}{R^2} - T_{rs}\right), \tag{9}$$

essendo

$$T_{rs} = s_{r+3}s_{s+3} - s_2 s_{r+s+4} + \frac{1}{n} s_2 s_{r+2} s_{s+2}, \tag{10}$$

cioè a_{rs} è razionale rispetto ai coefficienti della equazione $f(x) = 0$.

Estendendo nella espressione T_{rs} gli indici r, s anche al valore zero, si hanno le

$$T_{00} = R_0, \qquad T_{m,0} = T_{0,m} = R_m,$$

e quindi, pel valore (9) di a_{rs}, la relazione (8) condurrà a questa nuova rappresentazione del discriminante D:

$$D = (-1)^{n-2}\frac{n}{s_2^{n-3}}\begin{vmatrix} T_{00} & T_{01} & \dots & T_{0,n-3} \\ T_{10} & T_{11} & \dots & T_{1,n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n-3,0} & T_{n-3,1} & \dots & T_{n-3,n-3} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

3. Sieno $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... $\psi_m(x)$, $\left(m = \frac{n-3}{2}, n \text{ dispari}\right)$ m funzioni lineari delle $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_{n-3}(x)$ moltiplicate ciascuna per coefficienti indeterminati. Rammentando le relazioni (2), (3), si avranno dapprima le

$$\left\{\begin{aligned} \sum\psi_1(x) = \sum\psi_2(x) = \dots = \sum\psi_m(x) = 0, \\ \sum\varphi(x)\psi_1(x) = \sum\varphi(x)\psi_2(x) = \dots = \sum\varphi(x)\psi_m(x) = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

poi, disponendo opportunamente di un congruo numero di quei coefficienti indeterminati, sieno

$$\sum\psi_r^2(x) = 0, \qquad \sum\psi_r(x)\psi_s(x) = 0, \tag{13}$$

per r, $s = 1, 2, \dots m$. Queste ultime equazioni sono in numero $\frac{(n-1)(n-3)}{8}$, altrettanti dovranno quindi essere quei coefficienti indeterminati, cioè uno in $\psi_1(x)$, due in $\psi_2(x)$, ... m in $\psi_m(x)$.

Colla determinazione di questi coefficienti si giunge così al teorema:

Le $\frac{n-1}{2}$ *funzioni*

$$\varphi(x), \quad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \ldots \quad \psi_{\frac{n-3}{2}}(x)$$

definite sopra hanno la proprietà che la somma di ciascuna di esse, la somma dei loro quadrati, e dei loro prodotti a due a due, somme estese a tutte le radici della equazione $f(x) = 0$, *sono eguali a zero.*

Evidentemente i primi membri delle equazioni (13) sono funzioni quadratiche di quei coefficienti indeterminati, ed i coefficienti delle medesime, sono le quantità a_{rs} definite dalla (7) o dalla (9).

Per $n = 5$ si ha una sola funzione $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \lambda\varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

nella quale λ è il coefficiente indeterminato. Le due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ soddisfano alle cinque equazioni:

$$\sum\varphi(x) = 0, \quad \sum\psi(x) = 0, \quad \sum\varphi^2(x) = 0, \quad \sum\varphi(x)\psi(x) = 0, \quad \sum\psi^2(x) = 0,$$

determinando λ per modo sia:

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0,$$

o per la (8):

$$(a_{11}\lambda + a_{12})^2 = \frac{D}{5R^2}.$$

Per $n = 7$ si hanno due funzioni ψ ed esse devono contenere tre coefficienti indeterminati, onde sussistano per le tre funzioni

$$\varphi(x), \quad \psi_1(x), \quad \psi_2(x)$$

le nove equazioni del teorema superiore.

Posto

$$\psi_1(x) = \lambda\varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$
$$\psi_2(x) = \mu\varphi_2(x) + \nu\varphi_3(x) + \varphi_4(x),$$

si hanno i tre coefficienti indeterminati λ, μ, ν e le tre equazioni:

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0,$$
$$(a_{12}\lambda + a_{22})\mu + (a_{13}\lambda + a_{23})\nu + a_{14}\lambda + a_{24} = 0,$$
$$a_{22}\mu^2 + a_{33}\nu^2 + 2a_{23}\mu\nu + 2a_{24}\mu + 2a_{34}\nu + a_{44} = 0.$$

Il determinante A è in questo caso:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Si indichino con

$$\alpha_{11} = \frac{\partial A}{\partial a_{11}}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\partial A}{\partial a_{12}} = \frac{\partial A}{\partial a_{21}}, \quad \ldots$$

i determinanti minori di A; eliminando μ dalle due ultime equazioni superiori, avendo riguardo alla prima, si giunge alla

$$\alpha_{44}\nu^2 - 2\alpha_{34}\nu + \alpha_{33} = 0,$$

dalla quale:

$$\alpha_{44}\nu - \alpha_{34} = A^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}},$$

posto $\delta^{\frac{1}{2}} = \pm (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})^{\frac{1}{2}}$, ed essendo per la prima

$$a_{11}\lambda + a_{12} = \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Infine, posto

$$\alpha_{44}\mu - \alpha_{24} = M,$$

sostituendo nella seconda ed osservando essere identicamente

$$a_{12}\alpha_{42} + a_{13}\alpha_{43} + a_{14}\alpha_{44} = -a_{11}\alpha_{41},$$

$$a_{22}\alpha_{42} + a_{23}\alpha_{43} + a_{24}\alpha_{44} = -a_{21}\alpha_{41},$$

si ottiene la

$$M\lambda = -\alpha_{41} + (a_{13}\lambda + a_{23})A^{\frac{1}{2}},$$

e quindi il valore di μ.

Supponiamo ora che $h(x)$, $k(x)$ sieno le due seguenti funzioni:

$$h(x) = a\varphi(x) + b\psi_1(x) + c\psi_2(x), \qquad k(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\psi_1(x) + \gamma\psi_2(x),$$

nelle quali a, b, c, α, β, γ, sono coefficienti indeterminati; e pongasi

$$h(x) = \frac{1}{y-m}, \qquad k(x) = \frac{1}{y+m},$$

essendo m un coefficiente numerico. Per le proprietà delle funzioni $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,

si avranno le

$$\sum \frac{1}{y-m} = 0, \quad \sum \frac{1}{y+m} = 0; \quad \sum \frac{1}{(y-m)^2} = 0, \quad \sum \frac{1}{(y+m)^2} = 0,$$

e fra le h, k sussisterà la relazione

$$(14) \qquad 2mhk + k - h = 0,$$

per mezzo della quale si potranno ottenere i valori degli ultimi coefficienti indeterminati.

La equazione trasformata in y che soddisfa alle quattro relazioni superiori ha la forma seguente:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & y^7 + 7Ey^6 + 7Gy^5 - 21m^2Ey^4 - 7\left(m^2 + \tfrac{10}{3}G\right)m^2y^3 + 21m^4Ey^2 \\ & \qquad + 7m^4(2m^2 + 5G)y + H = 0 \end{aligned} \right.$$

e contiene i soli tre coefficienti letterali E, G, H.

Riservo per una ulteriore comunicazione la ricerca dei valori di E, G, H in funzione dei coefficienti della $f(x) = 0$, come pure il dimostrare la sussistenza della relazione (14).

12 maggio 1887.

[B.].

CXXIV.

SOPRA UN SIMBOLO DI OPERAZIONE NELLA TEORICA DELLE FORME.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XXII (1889), pp. 117-121.

1. Nel vol. I (pag. 294 e seguenti) del *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, del sig. HALPHEN *), è fatto sovente uso del seguente simbolo di operazione:

$$D = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

nel quale g_2, g_3, hanno l'ordinario significato, sono cioè gli invarianti quadratico e cubico di una forma binaria del quarto ordine.

Dimostrerò nella presente comunicazione che analoghi simboli di operazione sussistono per forme binarie di ordine n. Indicherò con

$$f(x_1, x_2) = A_0 x_1^n + n A_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + A_n x_2^n$$

la forma binaria e con $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ le radici della equazione $f(x) = 0$; i simboli di operazione, che intendiamo considerare, si deducono dal seguente:

$$D_\mu = \sum_0^{n-1} {}_r \left[A_0 a_r^\mu + n A_1 a_r^{\mu-1} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+2)}{1.2\ldots(\mu-1)} A_{\mu-1} a_r \right] \frac{\partial}{\partial a_r}$$

per $\mu = 0, 1, \ldots n-1$.

*) [Paris 1886-1891; tre volumi].

È noto che, indicando con g un invariante di grado m della forma f, si hanno le tre relazioni:

$$(1)\qquad D_0(g)=0,\qquad D_1(g)=\frac{mn}{2}A_0 g,\quad D_2(g)=\frac{mn(n-2)}{2}A_1 g;$$

se quindi ψ è un invariante assoluto di f, cioè un invariante di grado zero, saranno

$$(2)\qquad D_0(\psi)=0,\qquad D_1(\psi)=0,\qquad D_2(\psi)=0.$$

È noto altresì che, rappresentando con Δ il discriminante della forma f, si ha:

$$(3)\qquad D_\mu(\Delta)=\frac{n(n-1)\ldots(n-\mu)}{1.2.3\ldots(\mu-1)}A_{\mu-1}\Delta.$$

2. Dal simbolo di operazione $D_\mu(\psi)$, avendo riguardo alle tre relazioni (2) si deducono le altre tre seguenti:

$$\sum_0^{n-1}{}_r\frac{\partial D_\mu(\psi)}{\partial a_r}=-(n-\mu)D_{\mu-1}(\psi),$$

$$\sum_0^{n-1}{}_r a_r\frac{\partial D_\mu(\psi)}{\partial a_r}=(\mu-1)D_\mu(\psi),$$

$$\sum_0^{n-1}{}_r a_r^2\frac{\partial D_\mu(\psi)}{\partial a_r}=(\mu-2)D_{\mu+1}(\psi)+SD_\mu(\psi),$$

nell'ultima delle quali:

$$S=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}.$$

Supponiamo ora che sia

$$\psi=\frac{g}{\Delta^k},\qquad k=\frac{m}{2(n-1)},$$

e poniamo:

$$\Delta^k D_{s+3}(\psi)=\frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-s-3)}{1.2.3\ldots s}\alpha_s,$$

nella quale s può assumere i valori $0, 1, 2, \ldots n-4$. Essendo per la (3)

$$\sum_0^{n-1}{}_r\frac{\partial\Delta}{\partial a_r}=0,\qquad \sum_0^{n-1}{}_r a_r\frac{\partial\Delta}{\partial a_r}=n(n-1)\Delta,\qquad \sum_0^{n-1}{}_r a_r^2\frac{\partial\Delta}{\partial a_r}=2(n-1)S\Delta,$$

si hanno per le quantità $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ le tre relazioni:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^{n-1}{}_r \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_r} = - s\alpha_{s-1}\,,\\ &\sum_0^{n-1}{}_r\, a_r \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_r} = \frac{1}{2}(mn + 2s + 4)\alpha_s\,,\\ &\sum_0^{n-1}{}_r\, a_r^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial a_r} = (n - s - 4)\alpha_{s+1} + (m+1)S\alpha_s\,, \end{aligned}\right.$$

le quali dimostrano che le quantità α_0, α_1, ... sono i coefficienti di un covariante della forma f, covariante dell'ordine $n - 4$ e del grado $m + 1$. Questo covariante può quindi così esprimersi:

$$\Delta^k[D_3(\psi)x_1^{n-4} + D_4(\psi)x_1^{n-5}x_2 + \cdots + D_{n-1}(\psi)x_2^{n-4}],$$

ed è così definito il significato dei simboli di operazione $D_3(\psi)$, $D_4(\psi)$, ...

Pel caso di $n = 4$ si ha una sola quantità α_s, la α_0, e le equazioni (4) poste a confronto colle (1) dimostrano essere α_0 un invariante della biquadratica f, invariante del grado $m + 1$. Se quindi $g = g_2$, sarà α_0, salvo un coefficiente numerico, eguale a g_3; e se $g = g_3$ sarà $\alpha_0 = g_2^2$.

Posto

$$\Delta^{\frac{1}{3}}\psi_0 = g_2\,, \qquad \Delta^{\frac{1}{2}}\psi_1 = g_3\,,$$

si trovano infatti le

$$\Delta^{\frac{1}{3}}D_3(\psi_0) = 12 g_3\,, \qquad \Delta^{\frac{1}{2}}D_3(\psi_1) = \tfrac{2}{3}g_2^2\,,$$

i secondi membri delle quali sono i coefficienti della operazione D introdotta dal signor Weierstrass e della quale, come si è accennato, fece opportuno uso il signor Halphen.

3. È noto che il discriminante Δ si può esprimere in funzione di un certo numero di invarianti della forma corrispondente. Per la forma $f(x_1, x_2)$ dell'ordine n sieno g_0, g_1, ... g_r questi invarianti, e si indichino con m_0, m_1, ... m_r i rispettivi gradi.

Posto

$$\Delta^{k_0}\psi_0 = g_0\,, \qquad \Delta^{k_1}\psi_1 = g_1\,, \qquad \ldots \qquad \Delta^{k_r}\psi_r = g_r\,,$$

$$k_i = \frac{m_i}{2(n-1)}\,,$$

sia

$$F(\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_r)$$

una funzione omogenea di grado ρ delle $\psi_0, \psi_1, \ldots$, tale cioè che

$$k_0 \psi_0 \frac{\partial F}{\partial \psi_0} + k_1 \psi_1 \frac{\partial F}{\partial \psi_1} + \cdots + k_r \psi_r \frac{\partial F}{\partial \psi_r} = \rho F.$$

Evidentemente si avrà:

$$\frac{\partial F}{\partial g_i} = \frac{1}{\Delta^{k_i}} \frac{\partial F}{\partial \psi_i} - \rho \frac{F}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial g_i},$$

e per essa si ottiene la

$$(5) \qquad D_\mu(F) = \frac{(n-4)(n-5)\ldots(n-\mu)}{1.2.3\ldots(\mu-3)} \left[\sum_0^r {}^i \alpha_{\mu-3}^{(i)} \frac{\partial F}{\partial g_i} + \rho \frac{F}{\Delta} \sum_0^r {}^i \alpha_{\mu-3}^{(i)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_i} \right],$$

nella quale $\alpha_{\mu-3}^{(i)}$ per $i = 0, 1, 2, \ldots r$ sono coefficienti di covarianti, come si è dimostrato sopra.

Per $n = 4$, si hanno:

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2, \qquad \alpha_0^{(0)} = 12 g_3, \qquad \alpha_0^{(1)} = \frac{2}{3} g_2^2;$$

quindi:

$$\alpha_0^{(0)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_2} + \alpha_0^{(1)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_3} = 0;$$

cioè il secondo sommatorio dell'equazione superiore (5) è eguale a zero, e si ha:

$$D_3(F) = 12 g_3 \frac{\partial F}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial F}{\partial g_3}.$$

Quel secondo sommatorio è però nullo anche nel caso generale. Infatti essendo Δ funzione di $g_0, g_1, \ldots$, si avrà:

$$D_\mu(\Delta) = \sum_1^r {}^i \frac{\partial \Delta}{\partial g_i} D_\mu(g_i);$$

ma:

$$D_\mu(g_i) = \Delta^{k_i} D_\mu(\psi_i) + \frac{k_i g_i}{\Delta} D_\mu(\Delta);$$

inoltre:

$$\sum_1^r {}^i k_i g_i \frac{\partial \Delta}{\partial g_i} = \Delta.$$

Sarà quindi

$$0 = \sum_1^r {}^i \Delta^{k_i} D_\mu(\psi_i) \frac{\partial \Delta}{\partial g_i} = \sum_1^r {}^i \alpha_{\mu-3}^{(i)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_i}.$$

Ne risulta che il simbolo di operazione, il quale per una forma binaria dell'ordine

n corrisponde a quello citato da principio, è il seguente:

$$D_\mu(F) = \frac{(n-4)(n-5)\dots(n-\mu)}{1.2.3\dots(\mu-3)} \sum_0^r {}_i\, \alpha_{\mu-3}^{(i)} \frac{\partial F}{\partial g_i}.$$

Per una forma del quinto ordine: μ in quest'ultima equazione può assumere i valori 3, 4; i i valori 0, 1, supponendo g_0, g_1 essere gli invarianti di quarto e di ottavo grado della forma stessa, e quindi

$$\Delta = g_0^2 - 144 g_1.$$

Le quantità $\alpha_0^{(0)}$, $\alpha_1^{(0)}$ saranno i coefficienti di un covariante lineare e del quinto grado della forma stessa; $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$ i coefficienti di un covariante lineare e del nono grado, e siccome le forme del quinto ordine non ammettono covariante lineare indipendente del nono grado, saranno, salvo un coefficiente numerico:

$$\alpha_0^{(1)} = g_0 \alpha_0^{(0)}, \qquad \alpha_1^{(1)} = g_0 \alpha_1^{(0)} \;{}^{*}),$$

e si avranno le

$$D_3(F) = \alpha_0^{(0)} \frac{\partial F}{\partial g_0} + \alpha_0^{(1)} \frac{\partial F}{\partial g_1}, \qquad D_4(F) = \alpha_1^{(0)} \frac{\partial F}{\partial g_0} + \alpha_1^{(1)} \frac{\partial F}{\partial g_1}.$$

Per $n = 6$: μ può assumere i valori 3, 4, 5; i i valori 0, 1, 2, 3, essendo Δ funzione dei quattro invarianti g_0, g_1, g_2, g_3 dei gradi secondo, quarto, sesto e decimo. Le quantità α sono coefficienti di covarianti del secondo ordine, e dei gradi terzo, quinto, settimo, undecimo. Quest'ultimo non esistendo come indipendente, saranno $\alpha_0^{(3)}$, $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, funzioni lineari delle altre moltiplicate per opportuni coefficienti.

Una applicazione delle formole corrispondenti a quest'ultimo caso fu da me recentemente pubblicata **).

17 gennaio 1889.

[Pl.].

*) Applicando l'operazione D alla forma (discriminante)

$$\Delta = g_0^2 - 144 g_1,$$

si ha:

$$\alpha_0^{(0)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_0} + \alpha_0^{(1)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_1} = 0, \qquad \alpha_1^{(0)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_0} + \alpha_1^{(1)} \frac{\partial \Delta}{\partial g_1} = 0,$$

cioè:

$$\alpha_0^{(0)} g_0 - 72 \alpha_0^{(1)} = 0, \qquad \alpha_1^{(0)} g_0 - 72 \alpha_1^{(1)} = 0;$$

donde:

$$\alpha_0^{(0)} = \frac{1}{72} g_0 \alpha_0^{(1)}, \qquad \alpha_1^{(1)} = \frac{1}{72} g_0 \alpha_1^{(0)}.$$

**) BRIOSCHI, *Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, tomo IV (1888), 2° sem., pp. 341-347, 429-436].

CXXV.

UN TEOREMA NELLA DIVISIONE DEI PERIODI DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, serie II, volume XXVI (1893), pp. 727-731; volume XXVII (1894), pp. 186-193.

1. Sieno u, u_1, u_2 tre argomenti che soddisfano alla relazione

$$(1)\qquad \pm u \pm u_1 \pm u_2 = 0,$$

e poniamo:

$$x = \wp(u), \qquad x_1 = \wp(u_1), \qquad x_2 = \wp(u_2).$$

Suppongasi che per un quarto argomento v sia soddisfatta la relazione:

$$(2)\qquad \pm v \pm u_1 \pm u_2 = 0,$$

e sia $y = \wp(v)$, inoltre pongasi:

$$x + x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 + x_2 x + x x_1 = b, \quad x x_1 x_2 = -c,$$

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x)^2 (x - x_1)^2;$$

si ha il teorema espresso dalla relazione seguente:

$$(3)\qquad Dy = Lx^2 + Mx + N,$$

nella quale D, L, M, N sono funzioni di a, b, c, g_2, g_3.

È noto infatti che, per la relazione (1) fra gli argomenti, sussiste per le x, x_1, x_2 la

seguente *):

$$(x_1 x_2 + x_2 x + x x_1 + \tfrac{1}{4} g_2)^2 - 4(x + x_1 + x_2)(x x_1 x_2 - \tfrac{1}{4} g_3) = 0,$$

ossia:

$$b^2 - 4ac + \tfrac{1}{2} g_2 b - g_3 a + \tfrac{1}{16} g_2^2 = 0. \tag{4}$$

Analogamente per la relazione (2) si avrà:

$$(x_1 x_2 + x_2 y + y x_1 + \tfrac{1}{4} g_2)^2 - 4(y + x_1 + x_2)(y x_1 x_2 - \tfrac{1}{4} g_3) = 0,$$

la quale sottratta dalla precedente conduce ad una relazione divisibile per $x - y$, cioè alla

$$(x_1 - x_2)^2 (x + y) - 2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2} g_2 (x_1 + x_2) + g_3 = 0.$$

Moltiplicando questa per $(x - x_1)^2 (x - x_2)^2$ si arriva con breve calcolazione alla (3), essendo

$$D = a^2 b^2 + 18\, abc - 4 b^3 - 4 a^3 c - 27\, c^2,$$

$$L = 8 a^2 c - 2 a b^2 - 6 bc + \tfrac{1}{2} g_2 (ab - 9c) - g_3 (a^2 - 3b),$$

$$M = 12 a^3 c - 22 abc - 3 a^2 b^2 + 4 b^3 + 9 c^2 + 2 g_2 (b^2 - 3ac) - g_3 (ab - 9c),$$

$$N = 8 a^2 bc - 2 a b^3 + 2 b^2 c - 24 a c^2 + \tfrac{1}{2} g_2 (a b^2 - 4 a^2 c + 3 bc) - g_3 (b^2 - 3ac),$$

espressioni che facilmente si semplificano ricorrendo alla relazione (4).

2. Il teorema sopra dimostrato ha una importante applicazione nella divisione dei periodi per un numero n, primo, > 7. Sia per esempio $n = 11$ e pongasi:

$$u = \frac{2\omega}{11}, \qquad u_1 = \frac{4\omega}{11}, \qquad u_2 = \frac{6\omega}{11},$$

valori che soddisfano appunto la (1). Se $v = \dfrac{10\omega}{11}$, è anche soddisfatta la (2) e, se $v_1 = \dfrac{8\omega}{11}$, si ha:

$$u + u_2 - v_1 = 0;$$

posto quindi $y_1 = \wp\left(\dfrac{8\omega}{11}\right)$, si otterranno la relazione (3) e la

*) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, [t. I (1886), p. 30; t. III, (1891), p. 47].

$$D y_1 = L x_1^2 + M x_1 + N,$$

le D, L, M, N conservando i valori superiori.

3. Il caso di $n = 13$ presenta speciale interesse. Sieno

$$x = \wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad x_1 = \wp\left(\frac{6\omega}{13}\right), \quad x_2 = \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right),$$

$$y = \wp\left(\frac{12\omega}{13}\right) = \wp\left(\frac{14\omega}{13}\right), \quad y_1 = \wp\left(\frac{10\omega}{13}\right), \quad y_2 = \wp\left(\frac{4\omega}{13}\right),$$

si avranno pel dimostrato teorema le tre relazioni:

$$D y = L x^2 + M x + N,$$

$$D y_1 = L x_1^2 + M x_1 + N,$$

$$D y_2 = L x_2^2 + M x_2 + N,$$

dalle quali, posto

$$y + y_1 + y_2 = -\alpha, \quad y_1 y_2 + y_2 y + y y_1 = \beta, \quad y y_1 y_2 = -\gamma,$$

si dedurranno i valori di α, β, γ, i quali dovranno soddisfare ad una relazione analoga alla (4), ossia alla

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma + \tfrac{1}{2} g_2 \beta - g_3 \alpha + \tfrac{1}{16} g_2^2 = 0. \tag{5}$$

Ora i valori di α, β, γ sono i seguenti:

$$D\alpha = 9 a S^2, \quad D\left(\beta + \tfrac{1}{4} g_2\right) = -6 a R S, \quad D\left(\gamma + \tfrac{1}{4} g_3\right) = a R^2; \tag{6}$$

essi evidentemente soddisfano alla precedente relazione, e le espressioni S, R sono:

$$a S = 3 a c - b^2 + \tfrac{1}{12} g_2 (a^2 - 3 b),$$

$$2 a R = b c + \tfrac{1}{4} g_2 (a b + c) - g_3 (a^2 + 2 b) + \tfrac{5}{16} g_2^2 a - \tfrac{1}{2} g_2 g_3.$$

Le relazioni (4), (5) sono soddisfatte ponendo

$$\begin{cases} b + \tfrac{1}{4} g_2 = -2 a h, & c + \tfrac{1}{4} g_3 = a h^2, \\ \beta + \tfrac{1}{4} g_2 = -2 \alpha k, & \gamma + \tfrac{1}{4} g_3 = \alpha k^2, \end{cases} \tag{7}$$

le quali per le (6) dànno:

$$k = \frac{R}{3S}, \tag{8}$$

essendo R, S funzioni di a, b, ossia:

$$S = -a\left(b^2 - \tfrac{1}{12}g_2\right) - \tfrac{1}{2}g_2 b - \tfrac{3}{4}g_3,$$

$$R = -a\left(b^3 + \tfrac{1}{4}g_2 b + \tfrac{1}{2}g_3\right) + \tfrac{9}{4}g_3 b + \tfrac{1}{8}g_2^2.$$

Si noti che l'ipotesi di $k = b$, ossia di

$$3bS - R = 0,$$

conduce al seguente valore di a:

$$a(4b^3 - g_2 b - g_3) = -3\left(g_2 b^2 + 3g_3 b + \tfrac{1}{12}g_2^2\right),$$

cioè al valore di a nel caso della divisione dei periodi per il numero 7 *).

4. Posto

$$\psi(x) = x^4 - \tfrac{1}{2}g_2 x^2 - g_3 x - \tfrac{1}{48}g_2^2, \quad \varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

nel caso considerato sopra di $n = 13$, dalla formola della duplicazione si hanno le

$$y - x_1 = -3\frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)}, \quad y_1 - x_2 = -3\frac{\psi(x_2)}{\varphi(x_2)} \quad y_2 - x = -3\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}, \tag{9}$$

dalle quali si ponno pure ottenere i valori di α, β, γ. Si trovano così le

$$\alpha = \frac{1}{4a}\frac{H^2}{\varphi^2(b)}, \quad \beta + \frac{1}{4}g_2 = -\frac{1}{2a^2}\frac{HK}{\varphi^2(b)}, \quad \gamma + \frac{1}{4}g_3 = \frac{1}{4a^3}\frac{K^2}{\varphi^2(b)}, \tag{10}$$

nelle quali:

$$H = a\varphi(b) - 3p,$$

$$K = a^2[\psi(b) + p] + \tfrac{1}{2}aq + \tfrac{1}{16}\delta,$$

posto per brevità:

$$p = g_2 b^2 + 3g_3 b + \tfrac{1}{12}g_2^2, \qquad q = 9g_3 b^2 + g_2^2 b + \tfrac{3}{4}g_2 g_3,$$

$$\delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

---

*) Vedi la mia Nota: *Sur une forme nouvelle de l'équation modulaire du huitième degré* [American Journal of Mathematics, t. XIII (1891), pp. 381-386].

Si ottiene così per k il secondo valore

$$k = \frac{1}{a}\frac{K}{H},$$

e, per la (8), la equazione

$$aHR - 3SK = 0$$

del terzo grado in a e di cui i coefficienti sono funzioni di h, g_2, g_3.

Ora, siccome per le relazioni (7), (10) le quantità b, c, α, β, γ sono funzioni di a e di h, concludesi che i coefficienti dell'equazione di sesto grado, la quale ha per radici le x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, sono funzioni della indeterminata h.

Le relazioni (9) dedotte superiormente dalla formola della duplicazione sono esse pure un caso particolare della relazione di Halphen del n° 1, o del teorema di Abel.

Applicando infatti quel teorema alle tre radici y, x_1, x_1, corrispondenti ad argomenti che soddisfano la (1), si ha:

$$\left(x_1^2 + 2x_1 y + \tfrac{1}{4}g_2\right)^2 - 4(2x_1 + y)\left(x_1^2 y - \tfrac{1}{4}g_3\right) = 0,$$

ossia:

$$(4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3)\,y = x_1^4 + \tfrac{1}{2}g_2 x_1^2 + 2g_3 x_1 + \tfrac{1}{16}g_2^2,$$

alla quale riducesi tosto la prima delle (9).

5. I risultati ottenuti nei n[i] precedenti, si riassumono così. Nella divisione dei periodi per $n = 13$ le proprietà inerenti agli argomenti delle sette terne di quantità:

$$x,\quad x_1,\quad x_2;$$

$$\begin{array}{llllll} y, & x_1, & x_2; & y, & x_1, & x_1; \\ y_1, & x_2, & x; & y_1, & x_2, & x_2; \\ y_2, & x, & x_1; & y_2, & x, & x; \end{array}$$

si esprimono colle sette relazioni:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(x_1 x_2 + x_2 x + x x_1 + \tfrac{1}{4}g_2\right)^2 - 4(x + x_1 + x_2)\left(x x_1 x_2 - \tfrac{1}{4}g_3\right) = 0, \\ &(x_1 - x_2)^2(y + x) - 2x_1 x_2(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}g_2(x_1 + x_2) + g_3 = 0, \\ &(4x_1^3 - g_2 x_1 - g_3)y - \left(x_1^4 + \tfrac{1}{2}g_2 x_1^2 + 2g_3 x_1 + \tfrac{1}{16}g_2^2\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

nella seconda delle quali si ponno sostituire alle y, x_1, x_2 le y_1, x_2, x e le y_2, x, x_1; e nella terza alle quantità y, x_1, x_1 le y_1, x_2, x_2 e le y_2, x, x.

Ne deriva che sostituendo i valori delle y, y_1, y_2, dedotti dalla terza terna, nella seconda e reciprocamente, si avranno fra le x, x_1, x_2 quattro relazioni.

Ora le stesse proprietà si verificano per le sette terne:

$$y, \quad y_1, \quad y_2;$$

$$x, \quad y, \quad y_1; \qquad x, \quad y, \quad y;$$

$$x_1, \quad y_1, \quad y_2; \qquad x_1, \quad y_1, \quad y_1;$$

$$x_2, \quad y_2, \quad y; \qquad x_2, \quad y_2, \quad y_2;$$

sussisteranno cioè anche per le quantità y, y_1, y_2 le stesse quattro relazioni.

6. Alle relazioni (6), (10) ottenute sopra fra le quantità α, β, γ, a, b, c, importa ora aggiungere altre due siccome conseguenze delle (11).

Notiamo dapprima che, posto come sopra [equazioni (7)]:

$$b + \tfrac{1}{4} g_2 = -2ab, \qquad c + \tfrac{1}{4} g_3 = ab^2,$$

la prima delle (11) è soddisfatta, e le altre due prendono la forma:

$$Dy = Lx^2 + Mx + N, \tag{12}$$

(ed analogamente per y_1, x_1; y_2, x_2) e la

$$4ab_3^2 y = Ax_1^2 + Bx_1 + C, \tag{13}$$

(ed analogamente per y_1, x_2; y_2, x). In queste, posto

$$h_2 = b^2 - \tfrac{1}{12} g_2, \qquad h_3 = b^3 - \tfrac{1}{4} g_2 b - \tfrac{1}{4} g_3, \qquad h_4 = 4bh_3 - 3h_2^2,$$

$$\lambda = h_4 - h_2^2, \qquad \mu = h_4^2 - h_2 h_3^2, \qquad \nu = h_4^3 + h_3^4 + h_2^3 h_3^2 - 3h_2 h_3^2 h_4,$$

$$u = h_3^2 - h_2 h_4,$$

si hanno per le A, B, C i seguenti valori:

$$A = -9u, \qquad B = (h_3^2 - 9u)a - 9(2bh_3^2 - h_2^2 h_3 - bh_2 h_4),$$

$$C = 9h_2(h_2 h_3 - bh_4)a - 9(b^2 h_3^2 + 2h_2 h_3^2 + 2b^2 h_2 h_4 - 3h_2^2 h_4 - 2bh_2^2 h_3),$$

e per D, L, M, N i valori già dati precedentemente.

Le due espressioni

$$U = (y - x)(x_1 - h) + (y_1 - x_1)(x_2 - h) + (y_2 - x_2)(x - h),$$
$$V = (y - x)(x_2 - h) + (y_1 - x_1)(x - h) + (y_2 - x_2)(x_1 - h),$$

avranno ciascuna due valori secondo che si sostituiscono in esse per y, y_1, y_2 i valori dati dalle (12) o dalle (13). Così, sostituendo nella U i valori (13), si ottiene:

$$16 a h_3 U = 9 S^2 - D,$$

e sostituendovi i valori (12):

$$2 D U = L(3 S - D^{\frac{1}{2}});$$

e quindi:

$$8 a h_3 L = D(3 S + D^{\frac{1}{2}}). \tag{14}$$

Analogamente sostituendo nella V per y, y_1, y_2 i valori (12), si ottiene:

$$16 a h_3 V = (3 S + D^{\frac{1}{2}})^2,$$

e sostituendovi i valori (13):

$$8 a h_3^3 V = 54(h_4 m^2 + 2\mu m + \nu) - 9 h_3 u (3 S - D^{\frac{1}{2}}),$$

essendo

$$m = \tfrac{1}{12}(4 h_3 a - 9\lambda);$$

e quindi:

$$4 \cdot 3^3 (h_4 m^2 + 2\mu m + \nu) = 18 h_3 u (3 S - D^{\frac{1}{2}}) + h_3^2 (3 S + D^{\frac{1}{2}})^2. \tag{15}$$

Il valore superiore di m può rappresentarsi anche coll'una o coll'altra delle

$$m = \tfrac{1}{2} S(k - h), \qquad m = \tfrac{1}{6}(R - 3 h S),$$

e si hanno così le

$$4 h_3 a = 3(4 m + 3\lambda), \qquad H = 6(2 m + 3\lambda), \qquad h_3 S = -3(h_2 m - u),$$
$$h_3^2 (K - a h H) = -3^3 (h_4 m^2 + 2\mu m + \nu),$$

dove le H, K, R, S hanno i significati dei n^i 3, 4 e la quantità p del n° 4 è eguale a -3λ.

Per questi valori la equazione di condizione del n° 4

$$a H R - 3 S K = 0$$

si trasforma nella

$$h_3^2 m^3 = 9 u \rho,$$

essendo

$$\rho = m^3 + 3h_4 m^2 + 3\mu m + \nu;$$

ma trovasi con breve calcolo essere

$$4.3^3 \rho = h_3^2 (9S^2 - D);$$

si avrà quindi:

$$(16) \qquad 12m^3 = u(9S^2 - D).$$

Una seconda equazione di condizione risulta dall'eguagliare i due valori di α dati dalle equazioni (6), (10), e questa per le espressioni superiori di a, H prende la forma:

$$3S(4m + 3\lambda) = -D^{\frac{1}{2}}(2m + 3\lambda),$$

da cui, posto

$$X = 3S + D^{\frac{1}{2}}, \qquad Y = 3S - D^{\frac{1}{2}},$$

si deducono le

$$(17) \qquad (4m + 3\lambda)X = 2mD^{\frac{1}{2}}, \qquad (4m + 3\lambda)Y = -6(m + \lambda)D^{\frac{1}{2}};$$

ma dalla (14), osservando essere

$$h_3 L = 3^3 (m + \lambda)(4m + 3\lambda),$$

si ottiene la

$$2.3^4 (m + \lambda)(4m + 3\lambda)^2 = h_3 DX;$$

e quindi, per la seconda delle (17):

$$(18) \qquad 4m + 3\lambda = -\tfrac{1}{3} h_3^{\frac{1}{3}} D^{\frac{1}{2}} t,$$

essendo

$$t = \left(\frac{X}{Y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Si hanno in conseguenza le

$$(19) \qquad m = -\tfrac{1}{6} h_3^{\frac{1}{3}} Y t^4, \qquad m + \lambda = \tfrac{1}{18} h_3^{\frac{1}{3}} Y t, \qquad 2m + 3\lambda = h_3^{\frac{1}{3}} S t,$$

ed infine per la (16):

$$(20) \qquad u = -\tfrac{1}{18} h_3 Y t^9,$$

i quali valori rendono soddisfatta la (15).

7. Le tre quantità x, x_1, x_2, per le relazioni (7), soddisfano le

$$\varphi(x) + 4a(x - h)^2 = 0, \quad \varphi(x_1) + 4a(x_1 - h)^2 = 0, \quad \varphi(x_2) + 4a(x_2 - h)^2 = 0;$$

sarà quindi:

$$\Pi\varphi(x) = -4^3 a^3 h_3^2,$$

ossia per l'equazione (18):

$$\Pi\varphi(x) = D^{\frac{3}{2}} t^3. \tag{21}$$

Posto

$$\Delta = (y_1 - y_2)^2 (y_2 - y)^2 (y - y_1)^2,$$

la nota formola di addizione

$$[\wp(u-v) - \wp(u+v)][\wp(u) - \wp(v)]^2 = \wp'(u)\wp'(v),$$

applicata convenientemente, dà origine alle quattro relazioni:

$$\Pi\varphi(x) = DG, \qquad \Pi\varphi(y) = \Delta E,$$

$$\Pi\sqrt{\varphi(x)\varphi(y)} = \Delta^{\frac{1}{2}} G^2, \qquad \Pi\sqrt{\varphi(x)\varphi(y)} = -D^{\frac{1}{2}} E^2,$$

essendo

$$G = (y-x)(y_1 - x_1)(y_2 - x_2), \qquad E = (x - y_2)(x_1 - y)(x_2 - y_1).$$

Queste relazioni, le quali potrebbero dedursi anche dalle (12), (13), conducono dapprima per la (21) alla

$$G = D^{\frac{1}{2}} t^3;$$

poi alle

$$E = -\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{t^3}, \qquad E = D^{\frac{1}{4}} t^9;$$

infine alla

$$\Pi\varphi(y) = D^{\frac{3}{2}} t^{33},$$

da cui:

$$\Pi\varphi(x)\varphi(y) = D^3 t^{36};$$

e quindi, rammentando la formola generale:

$$\delta^{\frac{n-1}{4}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \zeta^6 \Pi\wp'^2\left(\frac{2\alpha\omega}{n}\right), \qquad \left(\alpha = 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}\right),$$

si avrà:

$$\zeta^2 = \frac{\delta}{D t^{12}}.$$

Ma pei valori superiori di X, Y si deduce tosto essere

$$4D = Y^2 (t^3 - 1)^2,$$

e con calcolazione più lunga essere

$$4\delta = Y^2 t^9 (t^3 - 1)^2 (t^6 - 3t^3 - 1),$$

e per queste:

(22)
$$z^2 = \frac{1}{t^3}(t^6 - 3t^3 - 1).$$

La quantità z, come è noto *), è radice della equazione modulare Jacobiana per la trasformazione del 13° ordine:

$$\frac{g_2^3}{\delta} = \frac{p q^3}{12^3 z^2}, \qquad \frac{27 g_3^2}{\delta} = \frac{w v^2}{12^3 z^2},$$

essendo

$$p = z^4 + 5z^2 + 13,$$

$$v = z^{12} + 10z^{10} + 46z^8 + 108z^6 + 122z^4 + 38z^2 - 1,$$

$$q = z^8 + 7z^6 + 20z^4 + 19z^2 + 1,$$

$$w = z^4 + 6z^2 + 13.$$

Si ha così il

Teorema. — *La funzione*

$$t_3 = \frac{3S + D^{\frac{1}{2}}}{3S - D^{\frac{1}{2}}}$$

delle tre quantità

$$x = \wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \qquad x_1 = \wp\left(\frac{6\omega}{13}\right), \qquad x_2 = \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right)$$

è radice di una risolvente del 28° grado.

8. Dai valori superiori di m, $m + \lambda$, u in funzione di t, si deducono quelli di h_2, h_3, h_4 e cioè:

$$h_2 = \frac{h_3^{\frac{2}{3}}}{3t^4}(t^9 + t^3 + 1), \qquad h_4 = -\frac{h_3^{\frac{4}{3}}}{3} t^4 (t^9 - 3t^6 + 7t^3 - 8),$$

$$\frac{1}{h_3} = -\frac{2}{Y}\frac{(t^3 - 1)^2}{t^9}(t^{12} - t^9 + 5t^6 + t^3 + 1).$$

---

*) Klein, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* [Mathematische Annalen, t. XIV (1879), pp. 111-172 (pag. 143)].

Kiepert, *Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXXVII (1879), pp. 199-216 (pag. 215)].

Ma, se nella espressione superiore $p = z^4 + 5z^2 + 13$ sostituiamo per z^2 il valore (22), si ha:

$$p = \frac{1}{t^6}(t^{12} - t^9 + 5t^6 + t^3 + 1);$$

quindi sarà:

$$\frac{1}{h_3} = -\frac{2}{Y}\frac{(t^3-1)^2}{t^3}p,$$

$$\frac{D^{\frac{1}{2}}}{h_3} = -\frac{(t^3-1)^3}{t^3}p.$$

Il valore di m dà in conseguenza:

$$4ah_3^{\frac{2}{3}} = -tD^{\frac{1}{2}},$$

e questa per le superiori conduce alla

$$a = -\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{6}}\frac{(t^3-1)^2}{t^3}\frac{p^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}};$$

e siccome per la prima delle relazioni (6) è $\alpha = \frac{9S^2}{D}a$, sarà:

$$\alpha = -\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{6}}\frac{(t^3+1)^2}{t^3}\frac{p^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}.$$

Osservando da ultimo essere

$$w = z^4 + 6z^2 + 13 = \frac{(t^6+1)^2}{t^6},$$

si giunge alla

$$a + \alpha = -\frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{6}}\frac{p^{\frac{2}{3}}w^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{3}}},$$

formola nota nella trasformazione del 13° ordine.

14 dicembre 1893, 15 febbraio 1894.

[B.].

CXXVI.

INTORNO AL MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE SOPRA UNA SUPERFICIE QUALSIVOGLIA.

Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle scienze residente in Modena,
tomo XXV, parte 2ª (1855), pp. 155-167 *).

1. La integrazione delle equazioni del moto di un punto materiale, o di un sistema di punti, in alcune circostanze particolari di movimento, fu di recente scopo alle indagini dei Geometri. Le nuove forme assegnate da LAGRANGE e da HAMILTON alle equazioni della dinamica, la integrazione delle medesime ridotta dipendente pei teoremi di HAMILTON e di JACOBI dalla integrazione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare e la teorica dell'ultimo moltiplicatore dovuta a JACOBI aprirono la via a quelle ricerche. Il sig. LIOUVILLE, assumendo le formole di LAGRANGE e giovandosi dei risultamenti del JACOBI, prese in tre differenti Memorie **) a considerare alcuni casi in cui le equazioni del moto di un punto sopra una superficie, del moto di un punto libero nello spazio, e del moto di un sistema di punti, sono integrabili; i quali due ultimi problemi vennero anche discussi, il primo dal sig. J. A. SERRET ***)

---

*) [Presentata dal socio Cavaliere ANTONIO BORDONI; approvata dal socio GIUSEPPE BIANCHI; ricevuta il dì 8 giugno 1852].

**) LIOUVILLE, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XI (1846), pp. 345-378; t. XII (1847), pp. 410-444]; *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels* [Ibid., t. XIV (1849), pp. 257-299].

***) J. A. SERRET, *Thèse sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, en raison inverse du carré des distances* [Ibid., t. XIII (1848), pp. 17-34].

mediante le formole di LAGRANGE, ed il secondo dal sig. RICHELOT *) partendo dalle formole della dinamica trasformate col metodo di HAMILTON.

Le ricerche che, innanzi il lavoro del sig. LIOUVILLE, esistevano intorno alle circostanze del moto di un punto sopra una superficie non piana, si riassumono in quelle del moto di un grave sopra una sfera o sopra una superficie di rotazione; e nelle più recenti del movimento di un punto materiale sopra una superficie di rivoluzione, ammesse alcune particolari condizioni per le forze agenti, le quali fanno parte di una Memoria del sig. JACOBI **). L'uso delle linee esistenti sopra una superficie a rappresentare punti della medesima, di tanto vantaggio nella trattazione di problemi di statica e di geometria, fu anche di giovamento in questa parte della dinamica, ed i problemi discussi dal signor LIOUVILLE devono appunto il loro successo a quel metodo di rappresentazione, come pure lo devono quelle cose che qui si aggiungono sul medesimo argomento.

2. Se colla

$$f(x, y, z) = 0$$

si indica la equazione di una superficie qualsivoglia riferita a tre assi ortogonali, e con X, Y, Z le componenti parallele a quegli assi della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sopra un punto materiale il quale deve moversi sopra quella superficie, si hanno le tre equazioni

$$(1) \qquad x'' = X + \lambda f'(x), \qquad y'' = Y + \lambda f'(y), \qquad z'' = Z + \lambda f'(z),$$

nelle quali

$$\lambda = \pm \frac{N}{\sqrt{f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2}},$$

ed N è una forza di grandezza incognita, diretta normalmente alla superficie e che rappresenta la resistenza della superficie medesima.

Dalle equazioni (1) si passa, come è noto, alla

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \int (Xx' + Yy' + Zz')\,dt + H,$$

essendo H una costante.

*) RICHELOT, *Bemerkung über einen Fall der Bewegung eines Systems von materiellen Puncten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XL (1850), pp. 178-182].

**) JACOBI, *De motu puncti singularis* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXIV (1842), pp. 5-27].

Si ritengano ora le x, y, z funzioni di due quantità u, v, parametri variabili di due superficie, le quali colle loro comuni intersezioni colla superficie data determinano due sistemi di linee esistenti nella medesima, per l'uno dei quali sistemi $u =$ cost., e per l'altro $v =$ cost. Ritenuto inoltre che le linee di un sistema sieno ortogonali alle linee dell'altro, ponendo secondo le notazioni di GAUSS *)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = G,$$

la equazione superiore si trasformerà nella

$$\tfrac{1}{2}(Eu'^2 + Gv'^2) = \int (P\sqrt{E}\,.\,u' + Q\sqrt{G}\,.\,v')\,dt + H,$$

essendo P, Q le componenti, dirette secondo le tangenti le linee $v =$ cost., $u =$ cost., della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sul mobile. Suppongasi abbia luogo il principio delle forze vive, talchè sia

$$\int (P\sqrt{E}\,.\,u' + Q\sqrt{G}\,.\,v')\,dt = U(u, v), \tag{2}$$

e si avranno le

$$P\sqrt{E} = \frac{\partial U}{\partial u}, \quad Q\sqrt{G} = \frac{\partial U}{\partial v},$$

$$\tfrac{1}{2}(Eu'^2 + Gv'^2) = U + H,$$

e le espressioni $u'\sqrt{E}$, $v'\sqrt{G}$ rappresenteranno le componenti secondo le tangenti alle linee $v =$ cost., $u =$ cost. della velocità che ha il mobile alla fine del tempo t.

3. Indicando con T la semisomma delle forze vive, alle formole (1) si ponno sostituire le

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial u'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial u} = 0, \quad \frac{d\frac{\partial T}{\partial v'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v} = 0; \tag{3}$$

ammessa la sussistenza della equazione (2). Queste sono le formole date da LAGRANGE nella Sezione IV della seconda parte della *Mécanique analytique*; nel caso poi del moto di un punto sopra una superficie, essendo $T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + Gv'^2)$, le medesime si mu-

*) GAUSS, *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* [Commentationes recentiores Societatis Regiæ Scientiarum Gottingensis, t. VI (1823-1827), pp. 99-146; riprodotto in Nouvelles Annales de mathématiques, t. XI (1852), pp. 195-252].

tano nelle

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dEu'}{dt}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial E}{\partial u}u'^2+\dfrac{\partial G}{\partial u}v'^2\right)-\dfrac{\partial U}{\partial u}=0, \\ \dfrac{dGv'}{dt}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial E}{\partial v}u'^2+\dfrac{\partial G}{\partial v}v'^2\right)-\dfrac{\partial U}{\partial v}=0. \end{cases}$$

JACOBI ha dimostrato che le formole ordinarie (1) pel moto di un punto sopra una superficie si ponno ridurre alla forma assegnata da HAMILTON alle equazioni pel moto di un sistema libero. Queste formole, utili nella trattazione di alcuni problemi, si ponno dedurre dalle superiori (3) di LAGRANGE nel modo seguente.

Pongasi

$$\frac{\partial T}{\partial u'}=p,\quad \frac{\partial T}{\partial v'}=q,$$

e da queste equazioni, le quali sono lineari rispetto ad u', v', si ricavino i valori di u', v' in funzione di p e di q; quindi si sostituiscano questi valori nella funzione T, la quale potrà così considerarsi come una funzione delle u, v, p, q. Dunque la T che è funzione delle u, v, u', v', ammesse le equazioni superiori, potrà ritenersi funzione delle u, v, p, q.

Ora si ha

$$T=\tfrac{1}{2}(Eu'^2+Gv'^2),$$

ossia

$$T=pu'+qv'-T.$$

Suppongasi la T nel primo membro funzione delle u, v, u' v', e la T nel secondo membro funzione delle u, v, p, q, e derivando l'equazione superiore rispetto a t si avrà, dopo una riduzione:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)u'+\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)v'=p'u'+q'v'-\frac{\partial T}{\partial u}u'-\frac{\partial T}{\partial v}v'-\frac{\partial T}{\partial p}p'-\frac{\partial T}{\partial q}q',$$

essendo $\left(\dfrac{\partial T}{\partial u}\right)$, $\left(\dfrac{\partial T}{\partial v}\right)$ le derivate della T rispetto alle u, v, quando si supponga la T funzione delle u, v, u', v'.

Da quest'ultima equazione si hanno le

$$\frac{\partial T}{\partial p}=u',\quad \frac{\partial T}{\partial q}=v',\quad \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)=-\frac{\partial T}{\partial u},\quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)=-\frac{\partial T}{\partial v};$$

per le quali le formole (3) riduconsi alle

$$p'=\frac{\partial(U-T)}{\partial u},\qquad q'=\frac{\partial(U-T)}{\partial v},$$

e queste, insieme alle due

$$\frac{\partial T}{\partial p} = u', \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = v',$$

sono le quattro formole richieste.

4. Dalle equazioni (4) si passa facilmente alle

$$E'u' + Eu'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2\right) + \frac{\partial U}{\partial u},$$

$$G'v' + Gv'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}u'^2 + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right) + \frac{\partial U}{\partial v}.$$

Ora

$$E' = \frac{\partial E}{\partial u}u' + \frac{\partial E}{\partial v}v', \qquad G' = \frac{\partial G}{\partial u}u' + \frac{\partial G}{\partial v}v',$$

per cui, sostituendo e riducendo, si avranno le

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = \dfrac{v'}{2\sqrt{E}}\left(\dfrac{\partial G}{\partial u}v' - \dfrac{\partial E}{\partial v}u'\right) + P, \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = \dfrac{u'}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{\partial E}{\partial v}u' - \dfrac{\partial G}{\partial u}v'\right) + Q. \end{cases}$$

Si indichi con ω l'angolo che il raggio del circolo osculatore la linea $v = \text{cost.}$ nel punto di coordinate u, v fa colla tangente nello stesso punto alla $u = \text{cost.}$, e con ρ il raggio del circolo osculatore medesimo. Si avrà, come è noto:

$$\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial E}{\partial v}}{E\sqrt{G}} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \quad \text{ed anche} \quad \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{G\sqrt{E}} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1},$$

essendo le ω_1, ρ_1, rispetto alla linea $u = \text{cost.}$ ciò che sono le ω, ρ rispetto alla linea $v = \text{cost.}$ Alle equazioni superiori si potranno quindi sostituire le

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = v'\sqrt{G}\left(\dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G} - \dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E}\right) + P, \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = u'\sqrt{E}\left(\dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E} - \dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G}\right) + Q. \end{cases}$$

Chiamisi θ l'angolo che la trajettoria sulla superficie fa colla linea $u = \text{cost.}$ ed

s l'arco percorso nel tempo t, sussisteranno le due equazioni

$$v'\sqrt{G} = s' \cos\theta, \qquad u'\sqrt{E} = s' \operatorname{sen}\theta,$$

per i quali valori le equazioni superiori si trasformano nelle

$$s'' \operatorname{sen}\theta + s' \cos\theta \,.\, \theta' = s'^2 \cos\theta \left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right) + P,$$

$$s'' \cos\theta - s' \operatorname{sen}\theta \,.\, \theta' = s'^2 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta\right) + Q.$$

Queste equazioni moltiplicate ordinatamente per sen θ, cos θ, quindi sommate, dànno

$$s'' = P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta\,; \tag{7}$$

e moltiplicate per cos θ e sen θ e poi sottratte dànno

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2}\,. \tag{8}$$

Quest'ultima equazione può ridursi ad una forma assai più semplice. Infatti chiamando r il raggio di contingenza geodetica della linea descritta dal mobile, vale a dire il raggio del circolo osculatore della linea piana nella quale si trasfigurerebbe la trajettoria, considerata come linea di contatto fra la superficie data ed una superficie sviluppabile, allorquando quest'ultima si distendesse in un piano, si ha come è noto:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} - \left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right),$$

per cui l'equazione superiore diventa la

$$\frac{1}{r} = \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2}\,,$$

dalla quale

$$P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta = \frac{s'^2}{r}\,. \tag{9}$$

Le equazioni (7), (9) tengono luogo delle (6) e quindi delle (4). Ora osservisi essere $P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta$ la componente diretta secondo la tangente alla trajettoria della risultante di tutte le forze sollecitanti il mobile, e $P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta$ la componente della forza medesima diretta secondo la tangente alla trajettoria ortogonale della linea descritta dal mobile. È evidente l'analogia fra le formole (7), (9) e quelle che si dànno comunemente per le questioni di moto di un punto sopra una linea. Dalla (9), se

$P = 0$, $Q = 0$, oppure $P \cos\theta - Q \operatorname{sen}\theta = 0$, si ha $r = \infty$, cioè la linea descritta dal mobile è geodetica. Dalla equazione medesima, se $P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta = ks'^2$, k costante, si ha $r = \frac{1}{k}$; cioè la linea descritta dal mobile sarà della famiglia di quelle della massima o minima area fra le isoperimetre.

5. La equazione (8) può porsi sotto una forma che prestasi facilmente all'integrazione in alcuni casi. Infatti, rammentati i valori di $\frac{\cos\omega}{\rho}$, $\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}$, si passa da quella alla seguente

$$\frac{d\theta}{ds}\sqrt{EG} = \frac{\cos^2\theta}{v'}\left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}s' + \frac{P\sqrt{E}}{s'}\right) - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{u'}\left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}s' + \frac{Q\sqrt{G}}{s'}\right),$$

e da questa, richiamati i valori di $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, alla

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\left[\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2(U+H)}\frac{\partial U}{\partial u}\right]\frac{du}{ds}$$
$$- \operatorname{sen}^2\theta\left[\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2(U+H)}\frac{\partial U}{\partial v}\right]\frac{dv}{ds},$$

per essere

$$s'^2 = 2(U+H).$$

Moltiplicando i termini dell'equazione superiore per $2GE(U+H)$, la risultante si riduce alla

$$(10)\quad \begin{cases} 2GE(U+H)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\dfrac{d\theta}{ds} \\ = E\cos^2\theta\dfrac{\partial G(U+H)}{\partial u}\dfrac{du}{ds} - G\operatorname{sen}^2\theta\dfrac{\partial E(U+H)}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}, \end{cases}$$

la quale evidentemente è l'equazione della trajettoria.

Si indichi con λ una funzione di u e di v, e suppongasi essere

$$G = \lambda\varphi(v), \qquad E = \lambda\psi(u);$$

l'ultima equazione trovata, dopo alcune riduzioni, mutasi nella

$$2\lambda(U+H)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\frac{\partial\lambda(U+H)}{\partial u}\frac{du}{ds} - \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial\lambda(U+H)}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Dalla forma di questa equazione apparisce subito che, ogni qualvolta risulti

$$\lambda(U+H) = f(u) - F(v),$$

la equazione stessa potrà integrarsi. Infatti essa riducesi alla

$$2[f(u) - F(v)] \operatorname{sen}\theta \cos\theta \frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta f'(u)\frac{du}{ds} + \operatorname{sen}^2\theta F'(v)\frac{dv}{ds},$$

che integrata dà

$$f(u)\cos^2\theta + F(v)\operatorname{sen}^2\theta = A, \tag{11}$$

essendo A costante, e quest'ultima è l'equazione della trajettoria alle derivate del primo ordine. Nel caso considerato più sopra sono compresi tutti quelli trattati dal sig. LIOUVILLE nella Memoria citata, la formola cui siamo giunti coincide perfettamente colle sue in quei casi particolari.

Per applicare le formole trovate a qualche esempio, supponiamo che la superficie sulla quale muovesi il punto materiale sia rappresentata dalla equazione

$$\frac{x^2}{t^2 - a^2} + \frac{y^2}{t^2 - b^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1,$$

e le superficie a parametri variabili dalle

$$\frac{x^2}{u^2 - a^2} + \frac{y^2}{u^2 - b^2} + \frac{z^2}{u^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{v^2 - a^2} + \frac{y^2}{v^2 - b^2} + \frac{z^2}{v^2 - c^2} = 1.$$

Queste equazioni dànno

$$x^2 = \frac{(t^2 - a^2)(u^2 - a^2)(v^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(t^2 - b^2)(u^2 - b^2)(v^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \quad z^2 = \frac{(t^2 - c^2)(u^2 - c^2)(v^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

e quindi

$$E = \frac{u^2(t^2 - u^2)(v^2 - u^2)}{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2)}, \quad G = \frac{v^2(t^2 - v^2)(u^2 - v^2)}{(v^2 - a^2)(v^2 - b^2)(v^2 - c^2)}.$$

Per cui, se avrà luogo la

$$U + H = \frac{f(u) - F(v)}{v^2 - u^2},$$

la equazione della trajettoria sarà la (11), essendo $\lambda = v^2 - u^2$.

Supponghasi che il sistema di linee per le quali $v =$ cost. sieno geodetiche; as-

sumendo, come si fa comunemente, pel parametro u la lunghezza di un arco delle linee medesime si avrà $E = 1$, per cui se ritiensi anche essere G ed U funzioni della sola variabile u, la equazione (10) darà

$$2\,G(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\frac{d\,G(U+H)}{du}\frac{du}{ds},$$

che integrata conduce alla

$$G\cos^2\theta = \frac{k}{U+H},$$

k costante. Se $U = 0$, e quindi la linea descritta dal mobile sia geodetica, si ha

$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{G}},$$

proprietà notissima pel caso delle superficie di rotazione.

6. Le circostanze del moto di un punto materiale sopra una superficie nelle ipotesi ammesse quì sopra, si deducono completamente dalle equazioni (5). Verremo così ad estendere ad una superficie qualunque un teorema dimostrato dal sig. JACOBI per le sole superficie di rotazione *). Dalle (5) si hanno le equazioni

$$u'' = \frac{1}{2}v'^2\frac{dG}{du} + P,$$

$$\frac{d\,v'\sqrt{G}}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}u'v'\frac{dG}{du}.$$

La seconda di queste integrata dà

$$Gv' = \alpha, \tag{12}$$

α costante arbitraria. Per questo valore la prima equazione diventa

$$u'' = \frac{\alpha^2}{2\,G^2}\frac{dG}{du} + P, \tag{13}$$

dalla quale integrando

$$u' = \sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{G}},$$

*) JACOBI, Memoria citata.

e quindi

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{G}}},$$

e

$$(14) \qquad t + A = \int \frac{1}{\sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{G}}}\,du.$$

Ma dalla (12) si ha

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha}{G}\frac{dt}{du},$$

per cui si avrà anche la

$$(15) \qquad v + B = \alpha \int \frac{1}{G\sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{G}}}\,du.$$

Le equazioni (14), (15) sono le soluzioni del problema; la (14) avendo origine dalla (13) ci porge il tempo impiegato dal mobile a percorrere l'arco di geodetica per la quale $v = \text{cost.}$, e la (15) ci fa conoscere la posizione della geodetica medesima rispetto ad una fissa.

Supponiamo che la superficie sia di rotazione, i meridiani saranno le linee geodetiche, i paralleli le trajettorie ortogonali. Riteniamo essere l'asse delle x quello della superficie, ed indichiamo con r il raggio del parallelo corrispondente al punto di coordinate x, y, z della superficie; e sia $x = \varphi(r)$ la equazione di un meridiano qualunque. Chiamisi v l'angolo che il meridiano, corrispondente al punto in cui trovasi il mobile alla fine del tempo t, fa con un meridiano fisso, che supporremo coincidere col piano delle xz; e sia u l'arco di quel meridiano. Saranno $y = r \operatorname{sen} v$, $z = r\cos v$; quindi $E = 1$, $G = r^2$, e le equazioni (14), (15) diverranno

$$t + A = \int \frac{1}{\sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{r^2}}}\,du,$$

$$v + B = \int \frac{\alpha}{r^2\sqrt{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{r^2}}}\,du,$$

od anche

$$(16)\qquad \begin{cases} t + A = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1+\varphi'^2(r)}{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{r^2}}}\,dr, \\ v + B = \displaystyle\int \frac{\alpha}{r^2}\sqrt{\frac{1+\varphi'^2(r)}{2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{r^2}}}\,dr, \end{cases}$$

le quali sono le formole trovate direttamente dal sig. JACOBI.

7. Supponiamo l'asse della superficie di rotazione essere verticale, ed agire sul punto materiale la sola gravità. Sarà $P = g\frac{dx}{du}$, e quindi per una delle superiori equazioni:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha}{r\sqrt{r^2(2gx+2\beta)-\alpha^2}},$$

β costante introdotta dalla integrazione. A determinare le costanti α, β si osservi che, se con k indicasi la velocità iniziale, con θ l'angolo che la direzione della medesima forma colla sua projezione sul meridiano che passa pel punto della superficie in cui trovasi il mobile al principio del tempo; il valore di rv' corrispondente a $t = 0$ sarà $k \operatorname{sen} \theta$; e quindi chiamando d il valore di x corrispondente a $t = 0$, si avrà:

$$(r^2 v')_0 = \psi(d)\, k \operatorname{sen}\theta,$$

talchè per la (12) sarà

$$\alpha = \psi(d)\, k \operatorname{sen}\theta,$$

essendo $r = \psi(x)$ il valore di r ricavato dalla $x = \varphi(r)$.

Così dalla (13) o dalla susseguente si ha:

$$k^2\cos^2\theta = 2gd + 2\beta - k^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

e quindi

$$2\beta = k^2 - 2gd.$$

Questi valori posti nella equazione superiore dànno:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\psi(d)\, k \operatorname{sen}\theta}{r\sqrt{r^2[2g(x-d)+k^2]-\psi^2(d)\,k^2\operatorname{sen}^2\theta}},$$

e, siccome dalla equazione $x = \varphi(r)$ si è dedotta la $r = \psi(x)$, sarà anche

$$(17)\qquad \frac{dv}{dx} = \frac{\psi(d)\, k \operatorname{sen}\theta\,\frac{du}{dx}}{\psi(x)\sqrt{\psi^2(x)[2g(x-d)+k^2]-\psi^2(d)\,k^2\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Sia

$$\psi(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

la superficie sarà un ellissoide di rotazione, e si avrà

$$(18)\quad \frac{dv}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - d^2} \, . \, k \operatorname{sen} \theta \sqrt{a^2 + e^2 x^2}}{(a^2 - x^2)\sqrt{(a^2 - x^2)[2g(x - d) + k^2] - (a^2 - d^2)k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}},$$

avendo posto $e^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$.

Nella Sezione VIII della seconda parte della *Mécanique analytique*, LAGRANGE ha dimostrato che, allorquando un punto pesante si muove sopra una sfera, la curva che esso descrive presenta una serie di punti le di cui ordinate verticali sono alternativamente massime o minime. Questa proprietà, la quale formò anche argomento ad una nota del sig. PUISEUX *), può venire estesa ad un gran numero di casi mercè delle formole trovate.

Considerando la equazione (18) è facile il concepire che i valori della x, i quali annulleranno il denominatore nel secondo membro della medesima senza annullare il numeratore, corrisponderanno alle ordinate massime o minime dei punti della linea descritta dal mobile. Ora questi valori della x esistono effettivamente, giacchè, facendo nel polinomio sotto il segno radicale $x = -\infty$, $x = -a$, $x = d$, $x = a$, i risultati sono positivo, negativo, positivo e negativo; talchè la equazione risultante dall'eguagliare a zero quel polinomio ammette tre radici reali. Anzi se indicansi con m ed n i valori, ordinatamente compresi fra a e d e fra d e $-a$, che soddisfanno alla detta equazione, sarà m il valore massimo di x, n il valore minimo.

Quanto si è detto partendo dall'equazione (18) intorno alla linea descritta da un grave sopra l'ellissoide di rotazione, evidentemente, osservando alla forma della (17), potrà valere per un grandissimo numero di altri casi; ed inoltre la proprietà può verificarsi anco in altre ipotesi sulla natura della forza agente, il che facilmente provasi in molti casi particolari, usando della seconda delle equazioni (16).

[Pa.], [G.].

*) PUISEUX, *Sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère* [Journal de mathématiques pures et appliquées, t. VII (1842), pp. 517-520].

CXXVII.

SUI CRITERJ DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI, E SULLE EQUAZIONI ISOPERIMETRICHE.

Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle scienze residente in Modena, tomo XXV, parte 2ª (1855), pp. 205-213 *).

I caratteri generali dai quali si possa desumere, se una funzione alle derivate dell'n^{mo} ordine

$$V(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})$$

sia derivata esatta di una funzione alle derivate dell'ordine $n-1$, si hanno, come è noto, dalla equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)' + \left(\frac{\partial V}{\partial x''}\right)'' - \cdots + (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial x^{(n)}}\right)^{(n)} = 0,$$

ed è anche noto come le equazioni isoperimetriche conducano ad equazioni di questa forma.

Lagrange nella 21ª delle *Leçons sur le calcul des fonctions,* dopo aver ritrovata la equazione superiore, dimostra come la equazione analoga, pel caso in cui nella funzione proposta la derivata d'ordine più alto fosse la x'', decompongasi in due equazioni più semplici; ed aggiunge potersi provare come in generale la equazione (1) sia de-

*) [Presentata dal socio Cavaliere Antonio Bordoni; approvata dal socio Giuseppe Bianchi; ricevuta il dì 22 dicembre 1853].

componibile in n equazioni, le quali devono tutte verificarsi identicamente allorquando la funzione sia una derivata esatta.

Questa importante decomposizione, indicata da LAGRANGE solamente come possibile, venne effettuata dal ch.^{mo} prof. BORDONI in una delle sue Lezioni di calcolo sublime *), nella quale si rinvengono trovate assai semplicemente le n equazioni da sostituirsi alla (1). Nella medesima lezione, l'Autore osserva che quelle n equazioni non saranno essenzialmente differenti fra loro, e, considerando il caso in cui la funzione proposta sia alle derivate del terzo ordine, dimostra che delle tre equazioni che si ottengono dalla (1) due sole sono essenzialmente differenti fra loro. In progresso di tempo i geometri RAABE e JOACHIMSTHAL giunsero per vie differenti a quella decomposizione, e dimostrarono che delle n equazioni, che ne risultano, le essenzialmente differenti sarebbero $\frac{n}{2}+1$ od $\frac{n+1}{2}$ secondo che n è pari o dispari **).

In questa nota, partendo dalle formole del prof. BORDONI, determiniamo quelle equazioni che, essendo essenzialmente differenti fra loro, sono i veri criterj per l'integrabilità della funzione proposta, ed il metodo adoperato ci condurrà ad altre equazioni, le quali si ponno assumere come criterj di integrabilità, e che in moltissimi casi particolari saranno più semplici delle prime. Dimostriamo in seguito come una analoga decomposizione eseguita sulle equazioni isoperimetriche conduca ad un interessante risultato ottenuto recentemente dal sig. OSTROGRADSKY, pel quale risultato l'integrazione di quelle equazioni è ridotta a quella di equazioni alle derivate del primo ordine; affatto analogamente a quanto già fecero HAMILTON e JACOBI per le equazioni della dinamica.

La funzione V supposta derivata esatta dovrà essere della forma

$$V = q + x^{(n)} p,$$

essendo q, p funzioni delle sole $t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}$. Questo valore di V riduce la (1) alla

$$(2) \qquad p^{(n)} - \left(\frac{\partial q}{\partial x^{(n-1)}} + x^{(n)} \frac{\partial p}{\partial x^{(n-1)}}\right)^{(n-1)} + \cdots \pm \left(\frac{\partial q}{\partial x} + x^{(n)} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0.$$

Si pongano le seguenti denominazioni:

---

*) ANTONIO BORDONI, *Lezioni di calcolo sublime*, Milano, 1831, tomo I, pag. 407.

**) RAABE, *Ueber die Anzahl und die Form der Bedingungsgleichungen* etc. [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXI (1846), pp. 181-212].—JOACHIMSTHAL, *Ueber die Bedingung der Integrabilität* [Ibid., t. XXXIII (1846), pp. 95-116].

$$
(3)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial q}{\partial x^{(n-1)}} - p(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' = p_1,\\
&\frac{\partial q}{\partial x^{(n-2)}} - p_1(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' = p_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial q}{\partial x'} - p_{n-2}(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' = p_{n-1},\\
&\frac{\partial q}{\partial x} - p_{n-1}(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' = p_n,
\end{aligned}\right.
$$

nelle quali col simbolo

$$p_r(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})'$$

intendesi rappresentare la derivata della funzione composta p_r rispetto alla t contenuta nelle componenti $t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)}$. Osservando essere

$$
(4)\qquad\left\{\begin{aligned}
&p' = p(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' + x^{(n)}\frac{\partial p}{\partial x^{(n-1)}},\\
&p_1' = p_1(t,\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{(n-2)})' + x^{(n)}\frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-1)}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.
$$

la equazione (2) si trasformerà nella

$$
\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x^{(n-2)}} - \frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-1)}}\right)x^{(n)}\right]^{(n-2)} - \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x^{(n-3)}} - \frac{\partial p_2}{\partial x^{(n-1)}}\right)x^{(n)}\right]^{(n-3)} + \cdots
$$
$$
\cdots \pm \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x^{(n-1)}}\right)x^{(n)} \pm p_n = 0,
$$

la quale, dovendo essere identica allorquando la V sia derivata esatta, dà luogo alle

$$
(5)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x^{(n-2)}} - \frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-1)}} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x^{(n-3)}} - \frac{\partial p_2}{\partial x^{(n-1)}} = 0, \quad \ldots\\
&\qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x^{(n-1)}} = 0, \qquad p_n = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Queste sono le n equazioni trovate dal prof. BORDONI, le quali si ponno sostituire alla (1).

Le equazioni (3), osservate le (4), (5), si trasformano nelle

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} p' + p_1 &= \frac{\partial V}{\partial x^{(n-1)}}, \\ p_1' + p_2 &= \frac{\partial V}{\partial x^{(n-2)}}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ p_{n-2}' + p_{n-1} &= \frac{\partial V}{\partial x'}, \\ p_{n-1}' &= \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

e da queste, indicando con r un numero qualunque fra quelli della serie $1, 2, 3, \dots n$, si ottengono le seguenti:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-r)}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(n-1)} \partial x^{(n-r)}} - \left(\frac{\partial p}{\partial x^{(n-r)}}\right)' - \frac{\partial p}{\partial x^{(n-r-1)}}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x^{(n-r+1)}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(n-2)} \partial x^{(n-r+1)}} - \left(\frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-r+1)}}\right)' - \frac{\partial p_1}{\partial x^{(n-r)}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial p_{r-1}}{\partial x^{(n-2)}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(n-r+1)} \partial x^{(n-2)}} - \left(\frac{\partial p_{r-2}}{\partial x^{(n-2)}}\right)' - \frac{\partial p_{r-2}}{\partial x^{(n-3)}}, \\ \frac{\partial p_r}{\partial x^{(n-1)}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(n-r)} \partial x^{(n-1)}} - \left(\frac{\partial p_{r-1}}{\partial x^{(n-1)}}\right)' - \frac{\partial p_{r-1}}{\partial x^{(n-2)}}. \end{aligned}\right.$$

Rappresentando per brevità col simbolo $A_{u,v}$ il binomio

$$\frac{\partial p_u}{\partial x^{(n-v-1)}} - \frac{\partial p_v}{\partial x^{(n-u-1)}},$$

le equazioni (5) si potranno scrivere

$$(8)\qquad A_{0,1} = 0, \qquad A_{0,2} = 0, \qquad \dots \qquad A_{0,n-1} = 0, \qquad p_n = 0,$$

e sostituendo nell'ultima delle equazioni (7) il valore di $\frac{\partial p_{r-1}}{\partial x^{(n-2)}}$ dato dalla penultima, e quindi quello di $\frac{\partial p_{r-2}}{\partial x^{(n-3)}}$ dato dalla terz'ultima, e così via; supponendo essere r un

numero pari, si giunge alla

$$(9)\qquad -A_{0,r}=A'_{0,r-1}-A'_{1,r-2}+A'_{2,r-3}-\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}A'_{\frac{r}{2}-2,\,\frac{r}{2}+1}-(-1)^{\frac{r}{2}}A'_{\frac{r}{2}-1,\,\frac{r}{2}}.$$

Analogamente col mezzo delle equazioni (7) si ottengono le

$$(10)\quad \begin{cases} -A_{1,r-2}=A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}, \\ A_{2,r-3}=A''_{0,r-3}+2A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}, \\ -A_{3,r-4}=A'''_{0,r-4}+3A''_{0,r-3}+3A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^{\frac{r}{2}-1}A_{\frac{r}{2}-1,\,\frac{r}{2}}=A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\,\frac{r}{2}}+\frac{r-2}{2}A^{\left(\frac{r}{2}-2\right)}_{0,\,\frac{r}{2}+1}+\frac{(r-2)(r-4)}{2.4}A^{\left(\frac{r}{2}-3\right)}_{0,\,\frac{r}{2}+2} \\ \qquad +\cdots+\frac{r-2}{2}A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}. \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nella (9) si arriva facilmente alla

$$A_{0,r}+\frac{r}{2}A'_{0,r-1}+\frac{r(r-2)}{2.4}A''_{0,r-2}+\frac{r(r-2)(r-4)}{2.4.6}A'''_{0,r-3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{r}{2}A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\,\frac{r}{2}+1}+A^{\left(\frac{r}{2}\right)}_{0,\,\frac{r}{2}}=0,$$

nella quale fatto $r=2, 4, 6, \ldots$ si ottengono altre equazioni analoghe. È evidente che, supposto

$$A_{0,r-1}=A_{0,r-3}=A_{0,r-5}=\cdots=A_{0,3}=A_{0,1}=0,$$

quelle equazioni renderanno nulle anche le espressioni

$$A_{0,r},\qquad A_{0,r-2},\ \ldots\ A_{0,4},\qquad A_{0,2};$$

quindi le effettive condizioni per l'integrabilità saranno le

$$(11)\qquad \begin{cases} p_n=0, \qquad A_{0,1}=A_{0,3}=\cdots=A_{0,n-2}=0, \\ \text{ovvero} \\ p_n=0, \qquad A_{0,1}=A_{0,3}=\cdots=A_{0,n-1}=0, \end{cases}$$

secondo che n sarà dispari o pari; giacchè, soddisfatte queste, lo sono tutte le (8). Quindi

se n è dispari saranno in numero $\frac{n+1}{2}$ le equazioni a soddisfarsi, e se n è pari saranno in numero $\frac{n}{2}+1$.

Se nell'ultima delle equazioni (10) poniamo $r=s+1$ (quindi s numero dispari), si ottiene la seguente

$$A_{0,s}+\frac{s-1}{2}A'_{0,s-1}+\cdots+\frac{s-1}{2}A_{0,\frac{s+3}{2}}^{\left(\frac{s-3}{2}\right)}+A_{0,\frac{s+1}{2}}^{\left(\frac{s-1}{2}\right)}+(-1)^{\frac{s-1}{2}}A_{\frac{s+1}{2},\,\frac{s-1}{2}}=0.$$

Ne deriva che si potranno assumere come criterj di integrabilità le equazioni

$$p_n=0,\qquad A_{0,1}=0,\qquad A_{1,2}=0,\qquad A_{2,3}=0,\qquad \ldots$$

$A_{\frac{n-1}{2},\,\frac{n+1}{2}}=0$ od $A_{\frac{n-2}{2},\,\frac{n}{2}}=0$, secondo che n è dispari o pari.

Queste equazioni potranno in alcuni casi particolari sostituirsi alle (11) con qualche vantaggio.

Si indichi con

$$\frac{\partial V}{\partial x_r}-\left(\frac{\partial V}{\partial x'_r}\right)'+\left(\frac{\partial V}{\partial x''_r}\right)''-\cdots+(-1)^n\left(\frac{\partial V}{\partial x^{(n)}_r}\right)^{(n)}=0 \tag{12}$$

una equazione isoperimetrica, e supponiamo la r possa assumere i valori $1, 2, 3, \ldots m$. Posto

$$\varphi_{r,s}=\frac{\partial V}{\partial x^{(s+1)}_r}-\left(\frac{\partial V}{\partial x^{(s+2)}_r}\right)'+\cdots\pm\left(\frac{\partial V}{\partial x^{(n)}_r}\right)^{(n-s-1)},$$

si ha evidentemente il gruppo di equazioni analoghe alle (6):

$$\left\{\begin{aligned}
\varphi_{r,n-1}&=\frac{\partial V}{\partial x^{(n)}_r},\\
\varphi'_{r,n-1}+\varphi_{r,n-2}&=\frac{\partial V}{\partial x^{(n-1)}_r},\\
\varphi'_{r,n-2}+\varphi_{r,n-3}&=\frac{\partial V}{\partial x^{(n-2)}_r},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi'_{r,1}+\varphi_{r,0}&=\frac{\partial V}{\partial x'_r},\\
\varphi'_{r,0}&=\frac{\partial V}{\partial x_r}.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Se queste equazioni vengono ordinatamente moltiplicate per $x_r^{(n+1)}$, $x_r^{(n)}$, ... x_r' e si sommano le equazioni che ne risultano membro per membro, si ottiene la

$$\sum_r (\varphi_{r,n-1} x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2} x_r^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{r,0} x_r')' = V' - \frac{\partial V}{\partial t},$$

e posto

$$T = \sum_r (\varphi_{r,n-1} x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2} x_r^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{r,0} x_r'),$$

$$V - T = \theta,$$

si ha

$$\theta' = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

La equazione (12) è alle derivate dell'ordine $2n$, quindi il primo membro di essa conterrà in generale le

$$x_r, \quad x_r', \quad x_r'', \ldots, x_r^{(2n-1)}.$$

Se queste quantità si considerano quali incognite, sarà $2mn$ il numero delle incognite contenute nelle m equazioni analoghe alla (12). Sostituiamo alle mn incognite

$$x_r^{(n)}, \quad x_r^{(n+1)}, \ldots, x_r^{(2n-1)}$$

le quantità

$$\varphi_{r,n-1}, \quad \varphi_{r,n-2}, \ldots, \varphi_{r,0},$$

talchè si considerino le $2mn$ quantità

$$(14) \qquad x_r, \quad x_r', \quad x_r'', \ldots, x_r^{(n-1)}, \quad \varphi_{r,n-1}, \quad \varphi_{r,n-2}, \ldots, \varphi_{r,0}$$

quali variabili indipendenti. Osservando al valore di θ si avranno le equazioni

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_r} = \frac{\partial V}{\partial x_r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_r'} = \frac{\partial V}{\partial x_r'} - \varphi_{r,0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_r''} = \frac{\partial V}{\partial x_r''} - \varphi_{r,1}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_r^{(n-1)}} = \frac{\partial V}{\partial x_r^{(n-1)}} - \varphi_{r,n-2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,n-1}} = -x_r^{(n)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,n-2}} = -x_r^{(n-1)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,n-3}} = -x_r^{(n-2)}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,0}} = -x_r',$$

dalle quali, per le equazioni (13), si hanno le

$$(15) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_{r,0}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x_r}, \quad \frac{\partial \varphi_{r,1}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x_r'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi_{r,n-1}}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x_r^{(n-1)}}, \\ &\frac{\partial x_r}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,0}}, \quad \frac{\partial x_r'}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_r^{(n-1)}}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{r,n-1}}. \end{aligned} \right.$$

Queste $2mn$ equazioni alle derivate del primo ordine contengono le $2mn$ quantità (14), e le m quantità analoghe alla $x_r^{(n)}$. Se si eliminano queste ultime col mezzo delle m equazioni

$$\varphi_{r,n-1} = \frac{\partial V}{\partial x_r^{(n)}},$$

si avranno tante equazioni quante bastano a determinare le $2mn$ incognite (14). Le equazioni (15) sono dovute al sig. OSTROGRADSKY; il modo col quale vennero quì trovate mostra come esse siano una trasformazione delle (13), le quali corrispondono alle (6) nel caso in cui la funzione V sia una derivata esatta. L'importanza di questa osservazione si fa manifesta allorquando si consideri il modo col quale il sig. HAMILTON giunse ad integrare le equazioni della dinamica poste sotto forma analoga a quella delle equazioni (15).

Se supponiamo $V = H + U$, e riteniamo H funzione omogenea del secondo grado rispetto alle x'_r, ed indipendente dalle x''_r, x'''_r, ..., ed U funzione delle sole x_r; la equazione (12) trasformasi nella

$$\frac{\partial (H+U)}{\partial x_r} - \left(\frac{\partial H}{\partial x'_r}\right)' = 0. \tag{16}$$

Inoltre si ha:

$$\varphi_{r,0} = \frac{\partial V}{\partial x'_r} = \frac{\partial H}{\partial x'_r}, \qquad \varphi_{r,1} = \varphi_{r,2} = \cdots = 0,$$

quindi:

$$T = \sum \frac{\partial H}{\partial x'_r} x'_r = 2H, \qquad \theta = U - A.$$

Le equazioni (15) per questi valori dànno le

$$\frac{\partial \varphi_{r,0}}{\partial t} = -\frac{\partial (A-U)}{\partial x_r}, \qquad \frac{\partial x_r}{\partial t} = \frac{\partial (A-U)}{\partial \varphi_{r,0}}. \tag{17}$$

Se la A rappresenta la funzione delle forze vive, e la U la funzione delle forze, le equazioni (16), (17) sono le due forme assegnate da LAGRANGE e da HAMILTON alle equazioni della dinamica.

[Pa.], [G.].

CXXVIII.

SULLA BISEZIONE DELLE FUNZIONI IPERELLITTICHE DI PRIMA SPECIE, E SUL PROBLEMA GEOMETRICO CORRISPONDENTE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, t. XXIV (1870-71), pp. 47-48.

Fra i risultati più importanti ottenuti recentemente dall'analisi moderna, devonsi a buon dritto annoverare quelli, che stabiliscono più intimi legami fra le proprietà geometriche di certe linee e superficie e quelle delle funzioni trascendenti iperellittiche ed abeliane; risultati che tendono a far sparire ogni distinzione fra l'Analisi e la Geometria.

Sono note le belle ricerche del sig. JORDAN sui rapporti fra le ventisette rette di una superficie generale del terzo ordine ed il problema della trisezione delle funzioni iperellittiche di prima specie; rapporti meglio determinati ed illustrati dai lavori dei professori CLEBSCH e CREMONA. È pur noto come lo stesso problema della trisezione abbia il sig. CLEBSCH fatto dipendere da quello di determinare i punti di comune intersezione di due curve piane, l'una del quarto ordine, con un punto doppio, l'altra speciale del terzo ordine, pure dotata di un punto doppio.

Mi è grato oggi di potere esporre, in seno a questa celebre Accademia, una nuova relazione, della natura di quelle che venni addietro accennando. Trattasi della bisezione delle funzioni iperellittiche di prima specie, e delle tangenti doppie ad una curva del quarto ordine, dotata di un punto doppio. Ognuno sa che l'equazione della divisione per due delle funzioni iperellittiche di prima specie è del sedicesimo grado, e che il numero delle tangenti doppie, il quale per la curva del quarto ordine è in generale di ventotto, riducesi a sedici, se la curva stessa ha un punto doppio. Ora la e-

quazione, colla quale si ottengono i punti di contatto di queste sedici tangenti doppie, è precisamente la stessa che conduce alla determinazione degli argomenti incogniti, nella bisezione di quelle funzioni iperellittiche.

Ma questa relazione non ha soltanto un valore in sè stessa. In questo caso, come in quello citato del sig. Clebsch, il problema geometrico si presenta di trattazione più facile ed elegante, e sparge luce sul problema analitico. Anzi nel nostro caso il problema geometrico fu già tema, da un altro punto di vista, alle meditazioni dei dotti, e le importanti ricerche dei signori Hesse e Salmon, sulle tangenti doppie delle curve del quarto ordine, ci forniscono preziosi risultati.

Se non che, essendo le curve del quarto ordine da noi considerate dotate di un punto doppio, la speciale forma della equazione che le rappresenta ci permise di fare un passo più avanti, e di completare la ricerca, calcolando sotto forma semplice la richiesta equazione del sedicesimo grado. Ad ottenere il qual risultato, ci furono di grande giovamento i recenti studii iniziati dai signori Clebsch e Gordan, e continuati dai professori Bessel ed Harbordt, sui sistemi simultanei di invarianti e di covarianti delle forme binarie; appunto perchè, come facilmente si dimostra, gli invarianti ed i covarianti della forma che, eguagliata a zero, rappresenta una curva del quarto ordine, con un punto doppio, sono funzioni razionali, intiere, degli invarianti e covarianti simultanei di due forme binarie, l'una del quarto, l'altra del secondo ordine.

Sarebbe stato mio desiderio di poter consegnare agli Atti dell'Accademia dei Lincei, non solo questi brevi cenni, ma la Memoria nella quale trovansi dimostrate e commentate le proprietà che venni esponendo. Ma se le attuali mie occupazioni non mi permisero una redazione degna degli Atti stessi, non posso muover lamento, in quanto che è ad esse che io debbo l'onore di rappresentare oggi il Governo del Re in questa adunanza e la soddisfazione per me sempre gradita di trovarmi fra uomini, che alla scienza dedicarono la loro esistenza.

4 dicembre 1870.

[Pa.].

CXXIX.

LA DETERMINAZIONE ANALITICA DI ALCUNE SINGOLARITÀ DELLE CURVE PIANE.

(Riassunto).

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª, tomo II, (1874-75), pp. XLIV-XLVI.

Le ricerche intorno le singolarità delle curve piane considerate dal punto di vista analitico possono dare luogo a tre procedimenti, i quali per quanto intimamente legati fra loro pure differiscono essenzialmente non solo rispetto ai mezzi analitici speciali a ciascuno di essi, ma altresì per le relazioni esistenti fra i medesimi ed altri problemi di Analisi.

Un primo procedimento consiste, come è noto, nella determinazione analitica della curva di cui i punti di intersezione colla data corrispondono a quei punti singolari di questa dei quali erasi proposto lo studio. Così, per esempio, si giunse a dimostrare che in generale i punti di flesso di una curva sono i punti di intersezione della medesima colla curva di cui la equazione ottiensi da quella della data mediante la forma analitica denominata *hessiana* dal suo Autore; così si pervenne alla determinazione analitica della curva del quattordicesimo grado di cui i punti di intersezione con una del quarto grado sono i punti di contatto delle tangenti doppie a quest'ultima e si stabilirono i criteri per ricerche simili rispetto alle curve di più alto grado.

Con un secondo procedimento si ha di mira la ricerca delle equazioni, dalla risoluzione delle quali si otterrebbero i valori delle coordinate di quei punti singolari. A questa classe di equazioni appartiene la nota equazione del nono grado risolubile algebricamente, la quale dà i nove punti di flesso di una cubica; come anche quella del sedicesimo grado corrispondente ai punti di contatto delle tangenti doppie ad una curva

del quarto ordine con un punto doppio, la quale pure dimostrai essere risolubile per funzioni algebriche, in una breve Nota pubblicata nei « Mathematische Annalen » nel 1871 *), illustrata dai lavori del prof. CREMONA e del prof. BRILL. Queste equazioni si possono evidentemente ottenere dalla eliminazione di una delle coordinate dalle due equazioni della curva data e di quella che la interseca nei punti singolari che si considerano, ed in questo senso il secondo procedimento non differirebbe dal primo, se alla ricerca di quelle equazioni non si potesse procedere direttamente.

Nel terzo procedimento infine, alla ricerca dei valori delle coordinate dei punti singolari si sostituisce quella dei valori del rapporto fra i parametri della retta che ha colla curva data un numero di punti comuni o di punti di contatto corrispondente alla singolarità della curva che vuolsi considerare. Questo terzo procedimento può definirsi nel modo più generale come segue: Data una funzione omogenea f di tre variabili x_1, x_2, x_3, i rapporti delle quali rappresentino le coordinate di un punto di una curva piana, supponendo che una di quelle variabili, per esempio la x_3, sia una funzione lineare delle altre due x_1, x_2; sostituendo questo valore di x_3 nella funzione f ottiensi una forma binaria, i coefficienti della quale contengono i parametri di quella funzione lineare. Trattasi di determinare il rapporto dei parametri stessi per modo, che la equazione, la quale ottiensi eguagliando a zero quella forma binaria, abbia, rispetto alle sue radici, proprietà corrispondenti alle singolarità della curva. Così per esempio, se trattasi della ricerca dei punti di flesso della curva, dovranno tre radici di quella equazione essere eguali fra loro; se dei punti di contatto delle tangenti doppie, dovranno essere uguali due coppie di radici, e così via. L'illustre CLEBSCH ha dato un primo esempio di queste ricerche nel suo importante lavoro *Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperellittiche*, pubblicata nelle « Memorie dell'Accademia di Gottinga » **) ed è ritornato sullo stesso argomento in un breve lavoro nei « Mathematische Annalen » ***) e nella sua *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872).

Il problema studiato da CLEBSCH, come egli stesso lo definisce nei succitati lavori, è il seguente:

Sieno u, v due forme binarie la prima del secondo, l'altra del terzo ordine; si vuol determinare una funzione lineare ξ per modo che la espressione

$$2v - 3\xi u + \xi^3$$

sia un cubo completo.

*) BRIOSCHI, *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double* [Mathematische Annalen, t. IV, (1871), pp. 95-98].

**) [Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, t. XIV (1869)].

***) [Mathematische Annalen, t. II (1870), pp. 193-197].

Per quanto fine ed elegante sia l'analisi adottata da CLEBSCH in questa sua ricerca, pure essa risentesi del modo alquanto speciale col quale fu definito lo scopo della ricerca stessa e quindi quell'analisi, forse già complicata in questo caso, non presterebbesi alla soluzione di altre simili quistioni. Ma se il problema viene definito nel modo più generale esposto sopra, noi troveremo nelle condizioni, le quali devono verificarsi per la sussistenza di fattori multipli o di radici eguali, le equazioni che conducono alla soluzione del problema analitico o del problema geometrico.

Così per esempio, se la funzione omogenea f delle tre variabili x_1, x_2, x_3 sarà del terzo ordine, siccome sostituendo in esse per x_3 una funzione lineare delle altre due si ottiene una forma binaria cubica la quale deve essere uguale al cubo di una funzione lineare, i due invarianti, quadratico e cubico, della forma stessa sono identicamente nulli; e queste condizioni sono già per se stesse le due equazioni alle quali conduce l'analisi di CLEBSCH.

Se la funzione f fosse del quarto ordine, si hanno a considerare due casi e cioè il primo, quando essa riducesi al prodotto del cubo di una funzione lineare per un'altra funzione lineare, il secondo allora quando sia eguale al quadrato di una funzione quadratica.

Le condizioni corrispondenti, definite sempre da proprietà dei covarianti e degli invarianti della forma binaria del quarto ordine, sono evidentemente differenti nei due casi; essendo, nel primo, identicamente nulli i due invarianti quadratico e cubico, nel secondo, nulli il covariante di sesto ordine ed il discriminante. Tanto nel primo che nel secondo caso quelle due condizioni sono le necessarie e sufficienti alla risoluzione dei due problemi analitici, che, espressi geometricamente, riguardano i 24 punti di flesso, o le 28 tangenti doppie di una curva generale del quarto ordine.

Questi esempî mi paiono sufficienti a dare una chiara idea della fecondità del metodo, al quale acquista interesse il fatto che a questi problemi geometrici corrispondono altrettanti problemi relativi alla teoria della moltiplicazione o della trasformazione delle funzioni ellittiche ed iperellittiche.

Esso estendesi anche, con alcune modificazioni, alle singolarità delle superficie, come spero potervi dimostrare in altra occasione; ma, limitandomi pel momento alle curve piane, permettetemi ancora di osservare che l'essenza del metodo stesso, quale risulta dalle proprietà che ho enunciato, come pure tutte le calcolazioni necessarie per lo sviluppo del medesimo hanno il loro fondamento in quella *teoria delle forme*, la quale iniziata dai matematici Inglesi ebbe ancora pochi cultori presso le altre nazioni, se si eccettui quella schiera di valenti geometri della scuola di Gottinga, che guidati dal CLEBSCH la portarono all'attuale perfezione, teoria che, costituendo il più potente anello di correlazione fra l'analisi e la geometria, potrebbe con opportunità indiscutibile essere insegnata in alcune delle Università italiane.

[Pa].

CXXX.

SULLE CONDIZIONI PER LA DECOMPOSIZIONE DI UNA CUBICA IN UNA CONICA ED IN UNA RETTA.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 89-90.

In un breve lavoro pubblicato negli « Annali di Matematica pura ed applicata » *) ho determinato, completando quanto aveva già scritto sull'argomento l'egregio prof. Salmon nel suo libro « *A Treatise on the higher plane Curves* » **), le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di una cubica piana in tre rette. Il metodo ivi dato è lo stesso di cui ebbi già occasione di fare cenno a questo Corpo Scientifico trattando di ricerche d'altra specie ***); e consiste nel considerare i covarianti e gli invarianti delle forme ternarie come funzioni intiere e razionali delle forme simultanee di un determinato numero di forme binarie.

Nel caso particolare, che costituisce l'oggetto di questa Nota, devonsi determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma ternaria cnbica si possa decomporre in una ternaria quadratica ed in un fattore lineare.

Sia

$$F = x_3^3 - 3 u x_3 + 2 v$$

la forma cubica nella quale u, v sieno funzioni binarie, quadratica la prima, cubica la seconda, di x_1, x_2. Evidentemente una forma cubica ternaria qualsivoglia potrà sempre porsi sotto quella forma.

*) [LXX: t. II, pp. 137-140].

**) [2ª edizione, Dublin 1873, pag. 190].

***) [CXXIX].

Ora è noto che, se F è eguale al prodotto di una quadratica ternaria per una espressione lineare, l'hessiano H di essa si potrà scrivere nella forma

$$H = \lambda F + \mu \psi^3, \tag{1}$$

nella quale ψ è una funzione lineare, λ, μ coefficienti costanti.

Ma, ponendo

$$A = \tfrac{1}{2}(uu)^2, \qquad \tau = (vv)^2, \qquad p = (uv)^2,$$

si ha:

$$H = Ax_3^3 - 2px_3^2 + (Au + 2\tau)x_3 + 2(Av - pu),$$

e siccome le forme binarie u, v ammettono, oltre il covariante simultaneo p, un secondo covariante simultaneo lineare indipendente $q = (up)$, si potrà sempre in generale rappresentare la forma lineare ψ nel seguente modo:

$$\psi = \alpha p + \beta q + x_3;$$

e perciò dal confronto dei coefficienti della x_3 nella (1) si avranno le quattro relazioni:

$$A = \lambda + \mu,$$

$$-2p = 3\mu(\alpha p + \beta q),$$

$$(Au + 2\tau) = -3\lambda u + 3\mu(\alpha p + \beta q)^2,$$

$$2(Av - pu) = 2\lambda v + \mu(\alpha p + \beta q)^3.$$

Dalla seconda di esse si hanno

$$\beta = 0, \qquad \mu\alpha = -\tfrac{2}{3},$$

ed essendo per la prima $\lambda = A - \mu$, le ultime due diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(2Au + \tau) = 3\mu(u + \alpha^2 p^2), \\ 2pu = \mu(2v - \alpha^3 p^3). \end{array} \right. \tag{2}$$

Rammentiamo ora che, indicando con B, C, E, K gli invarianti simultanei delle forme binarie u, v:

$$B = \tfrac{1}{2}(u\tau)^2, \qquad C = \tfrac{1}{2}(\tau\tau)^2, \qquad E = \tfrac{1}{2}(up)^2, \qquad K = \tfrac{1}{2}(vp)^3,$$

e ponendo

$$G = AC - B^2,$$

si ha:

$$K^2 = -(AG^2 - 2BGE + CE^2),$$

e le seguenti espressioni per le u, τ, v in funzione dei covarianti lineari p, q:

$$2Eu = Ap^2 + q^2,$$

$$2E^2\tau = (2BE - AG)p^2 + 2Kpq + Gq^2,$$

$$4E^3v = (2E^2 + A^2G - ABE)p^3 - 3AKp^2q + 3(BE - AG)pq^2 + Kq^3,$$

e sostituendo queste nella prima delle (2), dal confronto dei coefficienti delle potenze di p, q si ottengono le seguenti:

$$4A^2E + 2(2BE - AG) = 3\mu E(A + 2\alpha^2 E),$$

$$K = 0, \qquad 4AE + 3G = 3\mu E,$$

e da queste:

$$\mu = \frac{2}{3}\frac{2AE + G}{E}, \qquad BE - AG = \frac{3}{2}\mu\alpha^2 E^2,$$

ed essendo $\mu\alpha = -\frac{2}{3}$, si avranno le

$$\alpha = \frac{AG - BE}{E^2}, \qquad \mu = \frac{2}{3}\frac{2AE + G}{E},$$

$$(AG - BE)(2AE + G) = -E^3.$$

La seconda equazione (2), conducendo agli identici risultati, quando si operi sopra di essa come si è fatto per la prima, si avrà il teorema:

Le condizioni necessarie e sufficienti per la decomposizione di una cubica in una conica ed in una retta sono le due seguenti:

$$K = 0, \qquad E^3 + (AG - BE)(2AE + G) = 0;$$

oppure le

$$K = 0, \qquad E^2 + 2A(AG - BE) + BG - CE = 0;$$

e, per queste, posto

$$\alpha = \frac{AG - BE}{E^2},$$

si ottiene:

$$F = (x_3 + \alpha p)(x_3^2 - \alpha p x_3 - 3u - \alpha^2 p^2),$$

vale a dire la cubica $F = 0$ decomposta nella conica

$$x_3^2 - \alpha p x_3 - 3u - \alpha^2 p^2 = 0$$

e nella retta

$$x_3 + \alpha p = 0.$$

6 febbraio 1876.

[Pa.], [G.].

CXXXI.

SULLE CONDIZIONI CHE DEVONO ESSERE VERIFICATE DAI PARAMETRI DI UNA CURVA DEL QUARTO ORDINE PERCHÈ LA MEDESIMA SIA UNA CONICA RIPETUTA.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie 2ª, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 91-92.

Indicando con x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto di una curva del quarto ordine, con a una costante, e con γ, β, α tre forme binarie in x_1, x_2 degli ordini secondo, terzo, quarto, si può esprimere l'equazione di una curva generale del quarto ordine colla

$$(1) \qquad F = a x_3^4 + 6\gamma x_3^2 + 4\beta x_3 + \alpha = 0.$$

Se si suppone $\beta = 0$, si ha evidentemente da questa:

$$(a x_3^2 + 3\gamma)^2 + a\alpha - 9\gamma^2 = 0,$$

e perciò, se insieme alla $\beta = 0$ sussiste la $a\alpha - 9\gamma^2 = 0$, la quartica $F = 0$ riducesi alla conica ripetuta $a x_3^2 + 3\gamma = 0$. Vogliamo ora dimostrare che le due condizioni superiori non solo sono sufficienti, come si è già provato, ma sono anche necessarie.

Premettiamo a questo scopo il seguente lemma: Se una funzione omogenea F di i variabili, dell'ordine n, è identicamente eguale alla potenza r^{ma} di una funzione omogenea φ delle stesse variabili dell'ordine m; indicando con H l'hessiano della forma F e con H_φ l'hessiano della forma φ; si ha identicamente:

$$H^r = \left(\frac{m-1}{n-1}\right)^{r(i-1)} H_\varphi^r F^{i(r-1)}.$$

Nel caso che qui consideriamo essendo $i = 3$, $r = 2$, $m = 2$, sarà H_φ costante

e si avrà quindi

$$H^2 = \mu F^3, \tag{2}$$

indicando μ una costante.

Ora, ponendo

$$\tfrac{1}{2}(\gamma\gamma)^2 = A, \qquad \tfrac{1}{2}(\beta\beta)^2 = \tau, \qquad \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha)^2 = b;$$

$$(\beta\gamma)^2 = p, \qquad (\alpha\gamma)^2 = n, \qquad (\alpha\beta)^2 = \omega,$$

si ha, essendo F rappresentata dalla relazione (1):

$$H = Aax_3^6 + 2apx_3^5 + (4a\tau + an - 3A\gamma)x_3^4 + (2a\omega - 6p\gamma + 4A\beta)x_3^3$$
$$+ (ab - 3\gamma\tau + 4A\alpha - 3\gamma n - p\beta)x_3^2 + (2p\alpha - 2n\beta - 2\tau\beta)\,x_3$$
$$+ \gamma b + \alpha\tau - \beta\omega.$$

Sostituendo i valori di H e di F nella (2), dal confronto dei coefficienti delle potenze di x_3 si ottengono dapprima le

$$\mu a = A^2, \qquad p = 0,$$

per le quali i coefficienti di x_3^{10}, x_3^9 dànno:

$$a(4\tau + n) = 12A\gamma, \qquad a\omega = A\beta, \tag{3}$$

e quelli di x_3^8, x_3^7 dànno:

$$\left\{\begin{array}{c} 2a^2b + 5Aa\alpha - 27A\gamma^2 = 6a\gamma(\tau + n), \\ \beta[9A\gamma + a(\tau + n)] = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Per quest'ultima deve essere evidentemente:

$$\beta = 0 \qquad \text{oppure} \qquad 9A\gamma + a(\tau + n) = 0.$$

Nel secondo caso si hanno colla prima delle (3) le seguenti espressioni per τ, n:

$$a\tau = 7A\gamma, \qquad an = -16A\gamma,$$

per le quali la prima delle (4) diventerebbe:

$$2a^2b + 5Aa\alpha + 27A\gamma^2 = 0,$$

ed i coefficienti di x_3^6 darebbero:

$$5\gamma(2a^2b + 5Aa\alpha + 27A\gamma^2) = 7Aa\beta^2;$$

dovrebbe cioè essere per la sussistenza di queste ultime $\beta = 0$.

Si avrà quindi la condizione $\beta = 0$ e le relazioni (3), (4) si ridurranno alle due seguenti:

$$an = 12A\gamma, \qquad 2a^2b + 5Aa\alpha = 99A\gamma^2. \tag{5}$$

Ora i coefficienti di x_3^6 nella ipotesi di $\beta = 0$ dànno facilmente la relazione:

$$5a^2b + 9Aa\alpha = 216A\gamma^2,$$

dalla quale e dalla seconda delle (5) si ottengono le seguenti:

$$a\alpha = 9\gamma^2, \qquad a^2b = 27A\gamma^2;$$

e siccome la seconda di queste, come la prima delle (5), non sono che conseguenze della $a\alpha = 9\gamma^2$, ed inoltre le altre relazioni che risultano dal confronto delle potenze inferiori di x_3 sono identiche, si avrà il seguente teorema:

Le condizioni necessarie e sufficienti, perchè una quartica F della forma (1) *sia una conica ripetuta, consistono nell'annullarsi identicamente delle due forme binarie*

$$\beta = 0, \qquad a\alpha - 9\gamma^2 = 0.$$

6 febbraio 1876.

[G.].

CXXXII.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DEI PIANI TRITANGENTI AD UNA SUPERFICIE CUBICA.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie II, tomo III, parte 2ª (1875-76), pp. 257-259.

È noto per le ricerche di CLEBSCH *) che le bitangenti ad una curva del quarto ordine sono tangenti comuni a due curve della decima classe.

Una proprietà affatto analoga sussiste pei piani tritangenti ad una superficie del terzo ordine e cioè:

I piani tritangenti ad una superficie cubica sono insieme piani tangenti a tre determinate superficie della decima classe.

Sia

$$(1) \qquad P = x_4^3 + 3\,U x_4 + V = 0$$

la equazione di una superficie cubica. In essa le U, V sono due forme ternarie in x_1, x_2, x_3 quadratica la prima, cubica la seconda; ossia

$$(2) \qquad U = l x_3^2 + 2 m x_3 + n, \qquad V = \alpha x_3^3 + 3\beta x_3^2 + 3\gamma x_3 + \delta,$$

essendo le l, m, n; α, β, γ, δ forme binarie in x_1, x_2 rispettivamente degli ordini 0, 1, 2; 0, 1, 2, 3.

Sia ora

$$(3) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

*) CLEBSCH, *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LIX (1861), pp. 1-62].

la equazione di un piano; eliminando la x_4 da quest'ultima e dalla $P=0$, si ottiene la

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^3 + 3\,U(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)\xi_4^2 - V\xi_4^3 = 0,$$

ossia la equazione di una curva del terzo ordine. Se il piano (3) è piano tritangente della superficie (1), dovrà la forma f decomporsi in tre fattori lineari e reciprocamente. Ma indicando con h il covariante hessiano della forma f, si ha, come è noto, che nel caso quì considerato h è eguale al prodotto di una costante pei tre fattori di f, cioè si ha

$$h = \mu f, \tag{4}$$

essendo μ una costante. Sviluppando il valore superiore di f si ha:

$$f = a x_3^3 + 3 b x_3^2 + 3 c x_3 + d,$$

nella quale

$$a = \xi_3^3 + 3 l \xi_3 \xi_4^2 - \alpha \xi_4^3,$$

$$b = (\xi_3^2 + l\xi_4^2)\xi + (2 m \xi_3 - \beta \xi_4)\xi_4^2,$$

$$c = \xi_3 \xi^2 + 2 m \xi_4^2 \xi + (n \xi_3 - \gamma \xi_4)\xi_4^2,$$

$$d = \xi^3 + 3 n \xi_4^2 \xi - \delta \xi_4^3,$$

posto per brevità

$$\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2.$$

Ora dal valore di f si ottiene facilmente:

$$h = \left[\tfrac{1}{2} a (cc)^2 - (bc)^2\right] x_3^3 + \left[a (cd)^2 - \tfrac{1}{2} b (cc)^2 - (db)^2\right] x_3^2$$
$$+ \left[\tfrac{1}{2} a (dd)^2 + b (cd)^2 - \tfrac{1}{2} c (cc)^2 - 2 (dbc)^2\right] x_3 + \tfrac{1}{2} b (dd)^2 - c (cd)^2 + \tfrac{1}{2} d (cc)^2,$$

le quali espressioni sostituite nella (4), eguagliando i coefficienti delle medesime potenze di x_3, conducono alle relazioni:

$$\tfrac{1}{2} a (cc)^2 - (bc)^2 = \mu a,$$

$$a (cd)^2 - \tfrac{1}{2} b (cc)^2 - (bd)^2 = 3 \mu b,$$

$$\tfrac{1}{2} a (dd)^2 + b (cd)^2 - \tfrac{1}{2} c (cc)^2 - 2 (dbc)^2 = 3 \mu c,$$

$$\tfrac{1}{2} b (dd)^2 - c (cd)^2 + \tfrac{1}{2} d (cc)^2 = \mu d.$$

Sostituendo il valore di μ ricavato dalla prima di queste relazioni nelle altre tre

si ottengono le seguenti:

$$a^2(cd)^2 - 2ab(cc)^2 + 3b(bc)^2 - a(bd)^2 = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}a^2(dd)^2 + ab(cd)^2 - 2ac(cc)^2 - 2a(dbc)^2 + 3c(bc)^2 = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}ab(dd)^2 - ac(cd)^2 + d(bc)^2 = 0.$$

Queste equazioni, le quali sono degli ordini 1, 2, 3 rispetto alle x_1, x_2, devono verificarsi identicamente per la sussistenza della (4); potremo quindi porre in esse in luogo delle x_1, x_2 le $-\xi_2$, ξ_1, e le equazioni stesse non conterranno più se non le ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ed i coefficienti delle forme binarie l, m, n; α, β, γ, δ. Le equazioni stesse rappresentano quindi tre superficie alle quali è tangente il piano (3). Esse sono apparentemente degli ordini 13, 14, 15 rispetto alle ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ma scorgesi facilmente come la prima contenga il fattore ξ_4^3, la seconda il fattore ξ_4^4, la terza il fattore ξ_4^5 e quindi come quelle equazioni sieno del decimo ordine; e quindi rappresentino tre superficie della decima classe.

Analiticamente questo risultato equivale all'avere determinato tre equazioni dalle quali si potranno dedurre i valori dei rapporti $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4$. Supponendo eliminate da esse due fra quei parametri, si otterrà una equazione che darà i valori del rapporto fra gli altri due, equazione la quale, come è noto, dovrà essere del quarantacinquesimo grado.

Aggiungeremo un'altra osservazione relativa alla eguaglianza (4). Si conosce che una forma ternaria cubica f ha, oltre h, due covarianti k e θ del sesto e del nono ordine, e due invarianti s, t. È pure noto che, ponendo

$$(fh)^{rr} = f_{tt}h_{ss} + f_{ss}h_{tt} - 2f_{st}h_{st},$$

$$(fh)^{rs} = f_{tr}h_{ts} + f_{ts}h_{tr} - f_{tt}h_{rs} - f_{rs}h_{tt},$$

essendo r, s, t differenti fra loro ed eguali a 1, 2, 3, si hanno le

$$h = \sum(\pm f_{11}f_{22}f_{33}); \qquad k = \sum (fh)^{rs} f_r h_s; \qquad \theta = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix};$$

$$\sum (ff)^{rs} h_{rs} = \tfrac{1}{6} sf; \qquad \sum (hh)^{rs} f_{rs} = \tfrac{1}{18}(tf - 3sh).$$

Ora per la (4) si hanno le seguenti:

$$h = \mu f; \qquad k = 2\mu^2 fh = 2\mu^3 f^2; \qquad \theta = 0;$$

$$6\mu h = \tfrac{1}{6} sf; \qquad 6\mu^2 h = \tfrac{1}{18}(tf - 3sh);$$

e siccome le ultime due per la prima dànno

$$(6\mu)^2 = s, \qquad (6\mu)^3 = 2(t - 3s\mu) = 2t - (6\mu)^3,$$

si hanno le

$$s = (6\mu)^2, \qquad t = (6\mu)^3,$$

dalle quali:

$$6\mu = \frac{t}{s} = \frac{s^2}{t}, \qquad s^3 - t^2 = 0.$$

Se la cubica ternaria f è decomponibile in tre fattori lineari, si hanno quindi per la (4) le tre equazioni:

$$tf - 6sh = 0, \qquad s^2 f - 6tb = 0, \qquad \theta = 0,$$

dalle quali pure potrebbe dedursi un teorema analogo a quello dimostrato più sopra.

2 aprile 1876.

[G.].

CXXXIII.

SOPRA ALCUNI RECENTI RISULTATI OTTENUTI DAL SIG. KLEIN NELLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL QUINTO GRADO.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume I (1876-77), pp. 31-34.

Fra le forme binarie appartenenti alla classe di forme considerata nella Nota che ebbi l'onore di presentare in omaggio all'Accademia *), quella del dodicesimo ordine conduce ad alcuni risultati della maggiore importanza.

Il chiarissimo prof. KLEIN del Politecnico di Monaco ebbe pel primo ad osservare il nesso che esiste fra la forma canonica di quelle forme del dodicesimo ordine (forma canonica già considerata dal prof. SCHWARZ e che conduce all'equazione dell'icosaedro), e le equazioni del sesto grado aventi lo stesso gruppo di quella del moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine delle funzioni ellittiche. Questo primo felice pensiero condusse l'egregio Autore a considerare la risoluzione di queste equazioni, e quindi la risoluzione di quella del quinto grado, da un nuovo punto di vista ed in questa via giunse ad alcuni risultati, che io non dubito classificare fra i più importanti che nell'Analisi siansi scoperti in questi ultimi tempi.

Devo quindi ascrivere a mia ventura di potere in oggi, dietro annuenza dell'Autore, far conoscere al Corpo Accademico i principali fra quei risultati, come mi furono comunicati dal prof. KLEIN nelle sue lettere del 25 ottobre, del 3, dell'11 e del 15 scorso novembre [1876].

È noto che i coefficienti dell'equazione generale del sesto grado, che ha lo stesso gruppo dell'equazione del moltiplicatore nella trasformazione del quinto ordine delle

*) BRIOSCHI, *Sopra una classe di forme binarie* [LXXII: t. II, pp. 157-176].

funzioni ellittiche, dipendono da tre quantità A, B, C e queste alla loro volta sono funzioni di tre quantità A_0, A_1, A_2 *). È noto altresì essere

$$A = A_0^2 + A_1 A_2 .$$

1. Supongasi ora in primo luogo $A = 0$; si avrà:

$$\frac{A_0}{A_2} = -\frac{A_1}{A_0} = \eta ,$$

le epressioni B, C diventano, salvo un coefficiente costante, la prima eguale ad una forma f del dodicesimo ordine, che è la forma canonica di SCHWARZ sopra menzionata, la seconda al suo hessiano H. La equazione del sessantesimo grado

$$\frac{12^3 H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = x \tag{1}$$

conduce al seguente risultato. Sia η_0 una radice della medesima, le altre 59 si ottengono dalle formole:

$$\varepsilon^r \eta_0 , \qquad (r = 1, 2, 3, 4)$$

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{\varepsilon^r}{\eta_0} , \\ \dfrac{(\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu+1}) - \varepsilon^r \eta_0}{(\varepsilon^{-\mu} + \varepsilon^{-\mu-1})\varepsilon^r \eta_0 + 1} , \\ \dfrac{(\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu+1})\eta_0 + \varepsilon^r}{-(\varepsilon^{-\mu} + \varepsilon^{-\mu-1})\varepsilon^r + \eta_0} , \end{array}\right\} \qquad (\mu, r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

nelle quali ε è una radice quinta immaginaria dell'unità. La radice η_0 può esprimersi per mezzo di serie ipergeometriche nel modo seguente **):

$$\eta_0 = \frac{y_1}{y_2} = \frac{-1,785\, F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, x\right) + 2,858\, F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{2}, 1 - x\right)}{6,101\, F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, x\right) - 5,658\, F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{2}, 1 - x\right)},$$

dove:

$$f(y_1, y_2) = 1 .$$

---

*) I valori delle A, B, C in funzione di A_0, A_1, A_2 furono dati da me per la prima volta nell'anno 1858 nel lavoro: *Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado* [LII: t. I, pp. 335-341].

**) Vedi la mia Nota, *Sopra una classe di forme binarie*, sopra citata.

2. Sia in secondo luogo A non eguale a zero. Posto

$$\eta_1 = \frac{A_2}{A_0 + \sqrt{A}}, \qquad \eta_2 = \frac{A_2}{A_0 - \sqrt{A}},$$

si possono formare due equazioni analoghe alla (1), cioè:

$$\frac{12^3 H^3(\eta_1)}{f^5(\eta_1)} = x_1, \quad \frac{12^3 H^3(\eta_2)}{f^5(\eta_2)} = x_2,$$

ed i parametri x_1, x_2 hanno la notevole proprietà che la loro somma ed il loro prodotto sono esprimibili in funzioni razionali di A, B, C, e si ha:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^5 + m^3 - n^2 \pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4 l^5 m^3}}{2 l^5},$$

dove le l, m, n hanno i valori seguenti:

$$l = 12^{\frac{2}{5}}(B^2 - AC + 128 A^3 B),$$

$$m = 12^{-\frac{4}{3}}(C^2 + 2^6.75\, AB^3 + 2^6.35\, A^2 BC + 2^{11}.125\, A^4 B^2$$
$$- 2^{12}.13\, A^5 C - 2^{17}.5\, A^7 B + 2^{20} A^{10}),$$

$$n = \frac{1}{12^2}\begin{vmatrix} p & q + 5Ap & r \\ q & r + 5A^2 p & sp - 5Ar \\ r & sp & sq - 5A^2 r \end{vmatrix},$$

in quest'ultima essendo

$$p = 12B + 7344 A^3, \qquad q = 240 AB + 5760 A^4, \qquad s = B - A^3,$$
$$r = 1220 A^2 B - 1218 A^5 - C.$$

Questo risultato conduce direttamente alla ricerca delle radici $x_0, x_1, \ldots x_4$ di una equazione del quinto grado, per la quale sieno $\sum x = 0$, $\sum x^2 = 0$.

3. L'ultimo risultato a cui è giunto il prof. Klein riguarda la risoluzione delle equazioni del quinto grado indipendentemente dalla risolvente di sesto. Indicando con $x_0, x_1, \ldots x_4$ le radici di una equazione del quinto grado e supponendo

$$\sum x = 0, \quad \sum x^2 = 0,$$

l'Autore pone

$$\eta_1 = \frac{x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4}{x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^4 x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^3 x_4} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$\eta_2 = \frac{x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4}{x_0 + \varepsilon^3 x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \varepsilon^2 x_4} = \frac{p_1}{p_3},$$

e stabilisce, come al n° 1, le relazioni:

$$\frac{12^3 H^3(\eta_1)}{f^5(\eta_1)} = X_1, \qquad \frac{12^3 H^3(\eta_2)}{f^5(\eta_2)} = X_2,$$

dalle quali si ponno ricavare i valori delle η_1, η_2 per mezzo di serie ipergeometriche come sopra. Dimostra poi come le X_1, X_2 sieno funzioni algebriche dei coefficienti dell'equazione del quinto grado.

Si hanno infatti le

$$f(\eta_1)f(\eta_2) = \frac{\lambda p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}} \Pi_{12}(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \varepsilon^4 x_4),$$

$$H(\eta_1)H(\eta_2) = \frac{\mu p_1^{20}}{p_2^{20} p_3^{20}} \Pi_{20}(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2),$$

$$T(\eta_1)T(\eta_2) = \frac{\nu p_1^{30}}{p_2^{30} p_3^{30}} \Pi_{30}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2],$$

essendo T il covariante (fH) e le f, H come superiormente; inoltre le λ, μ, ν sono coefficienti numerici, e Π come d'ordinario indica il prodotto di fattori analoghi a quello scritto in seguito.

La risoluzione della equazione del quinto grado, per la quale $\sum x = 0$, $\sum x^2 = 0$, si ottiene così direttamente col mezzo di serie ipergeometriche.

I numeri 1, 2, 3 della presente Nota riassumono i principali risultati ottenuti dal prof. KLEIN.

3 dicembre 1876.

[G.].

CXXXIV.

SU DI ALCUNE FORMOLE NELLA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume II (1877-78), pp. 115-118.

1. Posto

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

se si indicano con e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $\varphi(x) = 0$, la relazione

$$x - e_1 = (e_2 - e_1)\xi^2 \tag{1}$$

dà luogo alle altre due

$$x - e_2 = (e_1 - e_2)(1 - \xi^2), \qquad x - e_3 = (e_1 - e_3)(1 - k^2\xi^2),$$

essendo $k^2 = \dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$. Si ha così, come è noto:

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}}. \tag{2}$$

Sia $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$ il discriminante di $\varphi(x)$, ossia

$$\delta = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2,$$

e si indichi con i l'invariante *assoluto*

$$i = \frac{g_2^3}{\delta}. \tag{3}$$

Dal valore di k^2 si ha facilmente:

$$k^2(1-k^2) = k^2 k'^2 = \frac{3e_2^2 - \frac{1}{4}g_2}{3e_2^2 - g_2},$$

e quindi:

$$e_2^2 = \frac{1}{12} g_2 \frac{(1-2k^2)^2}{1-k^2k'^2};$$

inoltre:

$$(e_3 - e_1)^2 = \frac{3}{4}\frac{g_2}{1-k^2k'^2}, \tag{4}$$

e per la $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ si avranno le

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}\frac{1+k^2}{\sqrt{1-k^2k'^2}}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}\frac{2k^2-1}{\sqrt{1-k^2k'^2}}, \\ e_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}\frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2k'^2}}, \end{array}\right. \tag{5}$$

per le quali:

$$g_3 = -4e_1e_2e_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{g_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(k^2-2)(1-2k^2)(1+k^2)}{(1-k^2k'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da questa, osservando essere identicamente

$$4(1-k^2k'^2)^3 - (k^2-2)^2(1-2k^2)^2(1+k^2)^2 = 27k^4k'^4,$$

si ottiene:

$$i = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4}, \tag{6}$$

ed essendo per la (4):

$$\frac{1}{(e_3-e_1)^6} = \frac{4^3}{3^3}\frac{(1-k^2k'^2)^3}{g_2^3} = 16\frac{ik^4k'^4}{g_2^3},$$

si avrà pel valore (3) di i:

$$\frac{\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{e_3-e_1}} = (2kk')^{\frac{1}{3}}.$$

La equazione (2) moltiplicata per $\sqrt[12]{\delta}$ darà quindi:

$$\frac{dx\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}} = (2kk')^{\frac{1}{3}}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \tag{7}$$

la quale dimostra la opportunità di adottare siccome forma normale per l'integrale ellittico del primo membro la espressione

$$\int \frac{d x \sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

come facevami osservare il prof. KLEIN in una sua lettera dello scorso dicembre [1877]. Supponendo g_2, g_3 reali, δ positivo ed $e_3 > e_2 > e_1$, posto

$$\omega = \int_{e_1}^{e_2} \frac{d x \sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \qquad \omega' = \int_{e_2}^{e_3} \frac{d x \sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

si hanno per le relazioni (1), (7) le

$$\omega = (2 k k')^{\frac{1}{3}} K, \qquad \omega' = (2 k k')^{\frac{1}{3}} K' \sqrt{-1},$$

nelle quali le K, K' hanno gli ordinari significati.

Da questo valore di ω rammentando che K soddisfa alla equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$k k'^2 \frac{d^2 K}{d k^2} + (1 - 3 k^2) \frac{d K}{d k} - k K = 0,$$

osservando essere per la (6)

$$(2 k k')^{\frac{1}{3}} k' \frac{d i}{d k} = 4 \sqrt{3}\, i^{\frac{2}{3}} \sqrt{i - 1}, \tag{8}$$

si ottiene pel periodo ω la equazione differenziale lineare

$$\frac{d^2 \omega}{d i^2} + \frac{1}{6} \frac{4 - 7 i}{i(1 - i)} \frac{d \omega}{d i} - \frac{1}{144} \frac{\omega}{i(1 - i)} = 0,$$

la quale dimostra essere ω esprimibile per mezzo di serie ipergeometriche *).

2. Sieno

$$\psi(y) = 4 y^3 - G_2 y - G_3, \qquad \Delta = G_2^3 - 27 G_3^2,$$

ed indicando con ε_1, ε_2, ε_3 le radici della equazione $\psi(y) = 0$, sia $\lambda^2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$. Si

*) BRUNS, *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Ordnung*, Dorpat, 1875.

avrà analogamente alla (7):

$$\frac{dy\sqrt[12]{\Delta}}{\sqrt{\psi(y)}} = (2\lambda\lambda')^{\frac{1}{3}} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}},$$

essendo $y - \epsilon_1 = (\epsilon_2 - \epsilon_1)\eta^2$. Dalla medesima (7) e da quest'ultima si dedurrà quindi che alla equazione di trasformazione

$$(9) \qquad \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2\eta^2)}} = \mu \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

si sostituisce la

$$(10) \qquad \frac{dy\sqrt[12]{\Delta}}{\sqrt{\psi(y)}} = \mu\left(\frac{\lambda\lambda'}{kk'}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{dx\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}} = \nu \frac{dx\sqrt[12]{\delta}}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

posto

$$(11) \qquad \nu = \mu\left(\frac{\lambda\lambda'}{kk'}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Il nuovo moltiplicatore ν, allorquando si indichino con Jacobi $B, B_1, B_2, \dots B_{\frac{n-1}{2}}$ i coefficienti della formola di trasformazione d'ordine n (numero primo) della (9), risulta quindi eguale a $B_{\frac{n-1}{2}}^{\frac{2}{3}}$ e si avrà:

$$\nu^3 = B^2_{\frac{n-1}{2}}.$$

Gli $n+1$ valori di $\nu^{\frac{3}{2}}$ dovranno dunque soddisfare ad $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari, avranno cioè la proprietà caratteristica delle radici di una equazione Jacobiana.

Indicando con I l'invariante assoluto di $\psi(y)$, si avrà analogamente alla (8):

$$(2\lambda\lambda')^{\frac{1}{3}}\lambda'\frac{dI}{d\lambda} = 4\sqrt{3}\, I^{\frac{2}{3}}\sqrt{I-1},$$

la quale, divisa per la stessa (8) membro per membro, dà pel valore (11):

$$\mu\frac{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{I-1}}{i^{\frac{2}{3}}\sqrt{i-1}} = \nu\frac{\lambda'}{k'}\frac{dk}{d\lambda}\frac{dI}{di};$$

o rammentando la nota relazione

$$\mu^2 = n\frac{kk'^2}{\lambda\lambda'^2}\frac{d\lambda}{dk}.$$

si avrà pel moltiplicatore ν la equazione

$$\nu^2 = n \frac{i^{\frac{2}{3}}\sqrt{i-1}}{I^{\frac{2}{3}}\sqrt{I-1}} \frac{dI}{di},$$

pure comunicatami dal chiarissimo prof. KLEIN.

È noto che, posto

$$\rho = \xi\sqrt{k}, \qquad \sigma = \eta\sqrt{\lambda},$$

si ha per una trasformazione della (9) di ordine n (numero primo):

$$\sigma = \frac{U(\rho)}{V(\rho)},$$

essendo

$$U(\rho) = \rho(B\rho^{n-1} + B_1\rho^{n-3} + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}),$$

$$V(\rho) = B + B_1\rho^2 + B_2\rho^4 + \cdots + B_{\frac{n-1}{2}}\rho^{n-1}.$$

Ora, risultando dalla (1)

$$\rho^2 = 2\frac{x-e_1}{\sqrt{\varphi'(e_1)}} \qquad \text{ed analogamente} \qquad \sigma^2 = 2\frac{y-\varepsilon_1}{\sqrt{\psi'(\varepsilon_1)}},$$

se si pone $U(\rho) = \rho\, T(\rho)$, osservando che nelle $T(\rho)$, $V(\rho)$ non entrano che potenze pari di ρ, si avrà per la corrispondente formola di trasformazione della (10):

$$\frac{y-\varepsilon_1}{\sqrt{\psi'(\varepsilon_1)}} = \frac{x-e_1}{\sqrt{\varphi'(e_1)}} \frac{T^2(x)}{V^2(x)},$$

essendo $T(x)$, $V(x)$ due polinomi del grado $\frac{n-1}{2}$.

Suppongasi essere

$$V(x) = a_0 x^{\frac{n-1}{2}} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + a_{\frac{n-1}{2}},$$

nella quale:

$$a_0 = B_{\frac{n-1}{2}} = \nu^{\frac{3}{2}};$$

la determinazione dei coefficienti a_1, a_2, ... si otterrà col mezzo della equazione a de-

rivate parziali che si deduce dalla analoga di JACOBI, cioè:

$$n(n-1)(x-e_1)V+\frac{1}{2}[\varphi'(x)-4n(x-e_1)(2x+e_1)]\frac{dV}{dx}$$

$$+\varphi(x)\frac{d^2V}{dx^2}+4n\sqrt{3}\,\delta^{\frac{1}{6}}\,i^{\frac{2}{3}}\sqrt{i-1}\,\frac{dV}{di}=0.$$

Il coefficiente di $x^{\frac{n-1}{2}}$ in $T(x)$ è eguale a B, essendo, come è noto:

$$B^2=\mu\frac{\lambda'}{k'};$$

ora si hanno facilmente le

$$k'\sqrt{\varphi'(e_1)}=(2kk')^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{1}{6}},\qquad \lambda'\sqrt{\psi'(\varepsilon_1)}=(2\lambda\lambda')^{\frac{1}{3}}\Delta^{\frac{1}{6}},$$

sarà quindi

$$B^2=\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{\sqrt{\varphi'(e_1)}}{\sqrt{\psi'(\varepsilon_1)}}\,\nu,$$

e gli altri coefficienti di $T(x)$ si determineranno egualmente per mezzo di una equazione alle derivate parziali.

In una prossima adunanza mi farò onore di presentare una seconda parte del presente lavoro diretta più specialmente allo studio delle equazioni modulari.

3 marzo 1878.

[G.].

CXXXV.

SULLA EQUAZIONE MODULARE DELL'OTTAVO GRADO.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume III (1878-79), pp. 45-47.

In un mio lavoro pubblicato recentemente negli « Annali di Matematica », *Sopra una classe di equazioni modulari* *), ho dimostrato che la equazione modulare Jacobiana dell'ottavo grado corrispondente a quella classe è la seguente:

$$f(y) = y^8 - 14y^6 + 63y^4 - 70y^2 + 4ty - 7 = 0, \tag{1}$$

essa ha cioè un solo coefficiente non numerico indicato colla lettera t. Come ebbi già ad osservare in quel lavoro, il prof. KLEIN era giunto allo stesso risultato movendo da altre considerazioni; e, siccome può vedersi nella sua Memoria: *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* **), egli trova pel valore di t:

$$t = -54\frac{g_3}{\sqrt{-\Delta}}, \text{ essendo } \Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

e g_2, g_3 gli invarianti della forma biquadratica sotto il radicale nell'integrale ellittico. Posto

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \text{ quindi } J - 1 = \frac{27g_3^2}{\Delta},$$

*) [LXXV: t. II, pp. 193-198].

**) [Mathematische Annalen, t. XIV (1879), pp. 111-172 (pag. 148)].

quel valore di t può anche esprimersi come segue:

$$(2) \qquad t = -6\sqrt{3}\sqrt{1-J}.$$

Derivando la equazione (1) rispetto a t, si ottiene la

$$f'(y)\frac{dy}{dt} + 4y = 0;$$

ma per la stessa (1) si ha che

$$\tfrac{1}{4}f'(y)(2y^7 - 29y^5 + 139y^3 - 187y + 7t) = 7(t^2 - 108);$$

quindi, ponendo

$$\sqrt{y'} = (2y^7 - 29y^5 + 139y^3 - 187y + 7t)\sqrt{y},$$

si giungerà alla

$$(3) \qquad 14(108 - t^2)\frac{d\sqrt{y}}{dt} = \sqrt{y'},$$

ed anche per la (2):

$$168\sqrt{3}\,J\sqrt{1-J}\,\frac{d\sqrt{y}}{dJ} = \sqrt{y'}.$$

Derivando la espressione $\sqrt{y'}$ rispetto a t, si ha dopo breve calcolazione che, posto

$$\sqrt{y''} = (y^4 - 11y^2 + 33)y\sqrt{y}, \qquad \sqrt{y'''} = (y^4 - 9y^2 + 14)\sqrt{y},$$

si ottiene la

$$(4) \qquad 14(108 - t^2)\frac{d\sqrt{y'}}{dt} = -7(108 - t^2)\sqrt{y} - 8t\sqrt{y'} + 4t\sqrt{y''} - 48\sqrt{y'''},$$

e siccome si hanno altresì le

$$(5) \qquad \begin{cases} 14(108 - t^2)\dfrac{d\sqrt{y''}}{dt} = -11(t\sqrt{y''} - 12\sqrt{y'''}), \\ 14(108 - t^2)\dfrac{d\sqrt{y'''}}{dt} = 32\sqrt{y'} + 81\sqrt{y''} - 9t\sqrt{y'''}, \end{cases}$$

ne risulta che le funzioni indicate con $\sqrt{y'}$, $\sqrt{y''}$, $\sqrt{y'''}$ si potranno esprimere con $\sqrt{y}$ e le sue derivate prima, seconda e terza rispetto a t. *I valori di ciascuna delle y', y'', y''' saranno perciò radici di equazioni modulari Jacobiane dell'ottavo grado, e ponendo*

$$\sqrt{Y} = p\sqrt{y} + q\sqrt{y'} + r\sqrt{y''} + s\sqrt{y'''},$$

nella quale p, q, r, s sono costanti rispetto ad y, la equazione dell'ottavo grado in Y sarà la più generale di questa specie.

Dalle equazioni (3), (4) si deduce la

$$14^2(108-t^2)^2\frac{d^2\sqrt{y}}{dt^2}-280(108-t^2)t\frac{d\sqrt{y}}{dt}+7(108-t^2)\sqrt{y}=4(t\sqrt{y''}-12\sqrt{y'''}),$$

la quale, per le (5), dà:

$$(6)\qquad 308(108-t^2)\frac{d^2\sqrt{y}}{dt^2}-440t\frac{d\sqrt{y}}{dt}+11\sqrt{y}=-8\frac{d\sqrt{y''}}{dt};$$

ed analogamente:

$$196(108-t^2)\frac{d^2\sqrt{y''}}{dt^2}-112t\frac{d\sqrt{y''}}{dt}+55\sqrt{y''}=11.14.16.24\frac{d\sqrt{y}}{dt}.$$

Da quest'ultima ricavasi per mezzo della precedente il valore di $\sqrt{y''}$ in funzione di $\sqrt{y}$ e delle sue derivate prima, seconda e terza; il qual valore differenziato nuovamente rispetto a t condurrà per la (6) alla seguente equazione differenziale lineare del quarto ordine:

$$16.7^3(108-t^2)^2\frac{d^4\sqrt{y}}{dt^4}-128.7^3(108-t^2)t\frac{d^3\sqrt{y}}{dt^3}+120.7^2(13t^2-508)\frac{d^2\sqrt{y}}{dt^2}$$
$$+16.1371t\frac{d\sqrt{y}}{dt}-57\sqrt{y}=0.$$

Notiamo da ultimo che, per la proprietà caratteristica delle equazioni modulari qui considerate, le espressioni y^3, y'^3, y''^3, y'''^3 saranno radici di equazioni Jacobiane dell'ottavo grado.

1 dicembre 1878.

[G.].

CXXXVI.

SULLA EQUAZIONE DELL'OTTAEDRO.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume III (1878-79), pp. 233-237.

1. Rappresentando con $F(x_1, x_2)$ una forma binaria del sesto ordine, suppongo che per essa il covariante biquadratico $(FF)_4$ sia identicamente eguale a zero.

È noto *) che per questa sua proprietà la forma F è il covariante di sesto ordine di una forma biquadratica f, e che indicando con H, Θ, A i due covarianti e l'invariante della medesima

$$H = \tfrac{1}{2}(FF)_2, \qquad \Theta = 2(FH), \qquad A = \tfrac{1}{2}(FF)_6,$$

si ha la relazione identica:

$$\Theta^2 + 4H^3 + \tfrac{1}{18}AF^4 = 0. \tag{1}$$

Sieno per la forma biquadratica f

$$h = \tfrac{1}{2}(ff)_2, \qquad \theta = 2(fh)$$

i due covarianti di quarto e di sesto ordine, e g_2, g_3 i due invarianti; fra queste cinque espressioni sussisterà, come è noto, l'equazione identica

$$\theta^2 = -4h^3 + g_2 hf^2 - g_3 f^3,$$

---

*) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig 1872, pag. 447.

e siccome, per quanto si è rammentato sopra, si ha $F = \theta$, sarà

$$F^2 = -4h^3 + g_2 hf^2 - g_3 f^3, \tag{2}$$

dalla quale:

$$H = -\tfrac{1}{3}\left(g_2 h^2 - 3g_3 hf + \tfrac{1}{12} g_2^2 f^2\right),$$

$$\Theta = 2\left[g_3 h^3 - \tfrac{1}{6} g_2^2 h^2 f + \tfrac{1}{4} g_2 g_3 hf^2 + \tfrac{1}{216}(g_2^3 - 54 g_3^2) f^3\right]. \tag{3}$$

Sostituendo questi valori di F^2, H, Θ nella equazione identica (1), si ottiene la relazione:

$$A = \tfrac{1}{6}\delta, \qquad \text{posto} \qquad \delta = g_2^3 - 27 g_3^2. \tag{4}$$

2. La equazione

$$4H^3 + \tfrac{1}{18} A t F^4 = 0, \tag{5}$$

fra $x = \dfrac{x_1}{x_2}$ e t, può denominarsi, dopo i lavori di SCHWARZ e di KLEIN, *la equazione dell'ottaedro* *). Essa è evidentemente del grado 24° rispetto ad x, ma, siccome dimostreremo or ora, è risolubile algebricamente.

Infatti, per la relazione (1), si può porre la equazione stessa sotto la forma seguente:

$$\Theta^2 = \tfrac{1}{18} A(t-1) F^4,$$

dalla quale, estraendo la radice e sostituendo per F^2, Θ, A i valori (2), (3), (4), si deduce la

$$g_3 h^3 - \tfrac{1}{6} g_2^2 h^2 f + \tfrac{1}{4} g_2 g_3 hf^2 + \tfrac{1}{216}(g_2^3 - 54 g_3^2) f^3 =$$

$$\pm \frac{1}{12\sqrt{3}} \sqrt{\delta(t-1)}\,(-4h^3 + g_2 hf^2 - g_3 f^3),$$

od introducendo una nuova indeterminata z legata alla x dalla equazione

$$h + zf = 0 \tag{6}$$

del quarto grado in x, si avrà, dividendo per f^3, la

$$\psi(z) \pm m\varphi(z) = 0, \tag{7}$$

---

*) SCHWARZ, *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die* GAUSS*ische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXXV (1873), pp. 292-335].—KLEIN, *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* [Mathematische Annalen t. IX (1876), pp. 183-208].

essendo

$$(8)\qquad \begin{cases} \psi(z) = g_3 z^3 + \frac{1}{6} g_2^2 z^2 + \frac{1}{4} g_2 g_3 z - \frac{1}{216}(g_2^3 - 54 g_3^2), \\ \varphi(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3, \qquad m = \frac{1}{12\sqrt{3}}\sqrt{\delta(t-1)}. \end{cases}$$

Le ventiquattro radici della equazione dell'Ottaedro si otterranno così dalla risoluzione delle due equazioni del terzo grado (7) e da quella della equazione del quarto grado (6).

Si osservi che, indicando con G_2, G_3 gli invarianti della forma biquadratica primo membro della equazione (6), si hanno, come è noto, i valori:

$$G_2 = g_2 z^2 + 3 g_3 z + \frac{1}{12} g_2^2, \qquad G_3 = \psi(z),$$

pei quali, ponendo

$$\Delta = G_2^3 - 27\, G_3^2,$$

si ottiene la

$$(9)\qquad \sqrt{\Delta} = \frac{1}{4}\varphi(z)\sqrt{\delta},$$

essendo $\psi(z)$, $\varphi(z)$ le espressioni superiori (8).

Per queste relazioni la equazione (7) si trasforma nella

$$(7')\qquad G_3 \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{t-1}{3}}\sqrt{\Delta} = 0,$$

dalla quale si ha tosto

$$(10)\qquad t = \frac{G_2^3}{\Delta}.$$

Differenziando quest'ultima rispetto a z, si giunge alla

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{9}{4}\frac{G_2^2 G_3}{\Delta^2}\delta\varphi(z),$$

ossia, per le (7'), (9), (10):

$$(11)\qquad \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{t-1}} = -4^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}\,\delta^{\frac{1}{6}}\frac{dz}{\varphi^{\frac{2}{3}}(z)};$$

ma dalla relazione (6) si ha:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{fh' - f'h}{f^2} = -\frac{1}{2}\frac{\theta}{f^2} = -\frac{1}{2}\frac{F}{f^2},$$

e d'altra parte, per le (2), è $\varphi(z) = \frac{F^2}{f^3}$; si otterrà quindi:

$$\frac{dz}{\varphi^{\frac{2}{3}}(z)} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{F(x)}},$$

cioè la superiore (11) condurrà alla seguente:

$$\frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}\sqrt{t-1}} = 2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{6}} \frac{dx}{\sqrt[3]{F(x)}},$$

vale a dire, se la forma binaria F ha la proprietà indicata al principio del n° 1, l'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{F(x)}}$ per mezzo della trasformazione algebrica (5) si può ridurre all'integrale ellittico.

3. Ricavando dalla equazione (11) il valore di $\frac{dz}{dt}$, se introduciamo per brevità la notazione

$$[z_t] = \frac{d^2 \log \frac{dz}{dt}}{dt^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \frac{dz}{dt}}{dt}\right)^2,$$

si ottiene facilmente la relazione:

$$[z]_t = \frac{4}{9t^2} + \frac{3}{8(1-t)^2} + \frac{1}{3t(1-t)} + \frac{2}{9\varphi^2}(3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

ma si ha tosto che

$$3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 = -24\,G_2;$$

inoltre per le (9), (10), (11) si ha:

$$\frac{G_2}{\varphi^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{48}\frac{1}{t(1-t)};$$

quindi

$$[z]_t = \frac{4}{9t^2} + \frac{3}{8(1-t)^2} + \frac{4}{9t(1-t)}.$$

Questa equazione differenziale del terzo ordine ha evidentemente per integrale la equazione (7) o la (10).

D'altra parte la (6) dà *):

$$[x]_\zeta = -\frac{3}{16\varphi^2}(3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2) = \frac{9}{2}\frac{G_2}{\varphi^2};$$

quindi

$$[x]_\zeta \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = -\frac{3}{32}\frac{1}{t(1-t)},$$

e siccome

$$[x]_t = [\zeta]_t + [x]_\zeta \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

si otterrà infine:

$$[x]_t = \frac{1-\lambda^2}{2t^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-t)^2} - \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - 1}{2t(1-t)},$$

nella quale $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{1}{2}$, come è noto pei lavori sopra indicati.

4. Supponendo $f = x_1^4 + x_2^4$, si hanno le

$$h = x_1^2 x_2^2, \qquad g_2 = 1, \qquad g_3 = 0, \qquad \delta = 1,$$

$$\theta = F = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4),$$

cioè la forma F considerata dal prof. SCHWARZ nella Memoria sucitata. Le equazioni (6), (7) diventano in questo caso le

$$x^2 + \zeta(x^4 + 1) = 0,$$

$$36\zeta^2 - 1 \pm 6\sqrt{3(t-1)}\,\zeta(4\zeta^2 - 1) = 0;$$

inoltre, essendo

$$G_2 = \frac{1}{12}(12\zeta^2 + 1), \qquad \Delta = \frac{1}{16}\zeta^2(4\zeta^2 - 1)^2,$$

si avrà per la (10):

$$t = \frac{1}{108}\frac{(12\zeta^2 + 1)^3}{\zeta^2(4\zeta^2 - 1)^2} = \frac{1}{108}\frac{(1 + 14x^4 + x^8)^3}{x^4(1 - x^4)^4}.$$

1 giugno 1879.

[G.].

*) Vedi una lettera da me diretta al prof. KLEIN nel 1876, *Extrait d'une lettre de* M. F. BRIOSCHI à M. F. KLEIN [Mathematische Annalen, t. XI (1877), pp. 111-114].

CXXXVII.

SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI INTEGRABILI PER FUNZIONI ELLITTICHE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume IV (1879-80), pp. 241-246.

1. Le equazioni differenziali lineari d'ordine superiore al secondo considerate in questo scritto furono in questi ultimi mesi argomento di interessanti ricerche dei signori Picard, Hermite, e Mittag-Leffler *). Il metodo da noi seguito differisce però sostanzialmente da quello degli indicati autori, e conduce più facilmente alla determinazione di certe due relazioni, la quale, come vedremo più avanti, costituisce lo scopo principale che si ha di mira nello studio di questa classe di equazioni differenziali.

Posto

$$\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

e

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\varphi(x)} - \sqrt{\varphi(\xi)}}{x - \xi}, \tag{1}$$

si dimostra tosto essere

$$\psi^2(x) + \psi'\sqrt{\varphi(x)} = 2x + \xi. \tag{2}$$

*) Picard, *Sur une classe d'équations différentielles linéaires* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XC (1880), pp. 128-131]. — Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* [Ibid., pp. 643-649, 761-766]. — Mittag-Leffler, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques* [Ibid., pp. 299-300].

Si indichino ora con $A_1, A_2, \ldots A_r$ le seguenti espressioni:

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 = \mu + \psi(x), \\ A_2 = A_1^2 + A_1'\sqrt{\varphi}, \\ A_3 = A_1 A_2 + A_2'\sqrt{\varphi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r = A_1 A_{r-1} + A_{r-1}'\sqrt{\varphi}, \end{cases}$$

nelle quali μ, ξ sono due indeterminate costanti rispetto ad x; A_1', A_2', ... sono i coefficienti differenziali di A_1, A_2, ... rispetto ad x, e $\sqrt{\varphi}$ è scritto per brevità in luogo di $\sqrt{\varphi(x)}$.

Dalla seconda delle relazioni (3), avuto riguardo alla (2), si ottiene la seguente:

$$(4)\qquad A_2 = 2\mu A_1 + 2x + \xi - \mu^2,$$

e da questa si deduce pel valore di A_3 la

$$A_3 = 2\mu A_2 + (2x + \xi - \mu^2)A_1 + 2\sqrt{\varphi}.$$

Sostituendo in quest'ultima per A_2 il valore (4) trovato sopra, ed osservando che per la (1) si ha:

$$(5)\qquad \sqrt{\varphi} = \sqrt{\varphi(\xi)} + 2(x - \xi)(A_1 - \mu),$$

si giunge alla

$$(6)\qquad A_3 = (6x - a)A_1 - b,$$

posto

$$(7)\qquad a = 3(\xi - \mu^2), \qquad b = 2\mu^3 - 6\mu\xi - 2\sqrt{\varphi(\xi)}.$$

Col procedimento indicato dalle relazioni (3) si deduce dal valore (6) di A_3 il seguente valore di A_4:

$$A_4 = (6x - a)A_2 + (6\sqrt{\varphi} - b)A_1,$$

nel quale sostituendo per A_2 il valore (4) ed osservando essere

$$(8)\qquad A_1\sqrt{\varphi} = [2\mu(x - \xi) - \sqrt{\varphi(\xi)}]A_1 + 2x^2 + \tfrac{2}{3}ax + \tfrac{2}{9}a^2 - b\mu - \tfrac{1}{2}g_2,$$

si giunge alla

$$(9)\qquad A_4 = 2(12\mu x + b)A_1 + 24x^2 + 4ax + a^2 - 6b\mu - 3g_2.$$

Analogamente si troverà:

$$(10)\quad \begin{cases} A_5 = (120\,x^2 - 20\,a\,x - \frac{5}{3}a^2 + 10\,b\,\mu - 3\,g_2)A_1 \\ \quad - 20\,b\,x + 4\,\mu(a^2 - 6\,b\,\mu - 3\,g_2) - \frac{4}{3}\,a\,b, \end{cases}$$

e così di seguito.

2. Indicando con α_0, α_1, β_0, β_1, β_2, ... delle costanti o dei coefficienti numerici, si vogliano ora determinare le medesime per modo che risulti identicamente

$$(11)\qquad A_3 + (\alpha_0 + \alpha_1 x)A_1 + \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2\sqrt{\varphi} = 0.$$

Sostituendo nella medesima per A_3 il valore (6) e per $\sqrt{\varphi}$ il (5), essa riducesi evidentemente alla forma

$$L A_1 + M = 0,$$

essendo L, M funzioni intiere razionali di x.

Affinchè la equazione (11) sia soddisfatta identicamente, dovranno quindi essere eguali a zero i coefficienti delle varie potenze della x in L ed in M; cioè nel caso attuale si avranno le quattro equazioni:

$$\beta_1 = -\mu(\alpha_1 + 6), \qquad \beta_2 = -\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 6),$$

$$\alpha_0 = -(\alpha_1 + 3)\xi - 3\mu^2, \qquad \beta_0 = \tfrac{1}{2}[4\mu^3 + 2\alpha_1\mu\xi + (\alpha_1 + 2)\sqrt{\varphi(\xi)}].$$

Introduciamo ora la condizione che i valori delle ξ, μ, i quali si ponno dedurre dalle equazioni superiori, od almeno quelli di una di esse, sieno in numero di tre. Eliminando la μ dalle ultime due equazioni si vede tosto che questa condizione non può verificarsi se non è $\alpha_1 + 6 = 0$; salvo il caso in cui fosse $\alpha_1 + 3 = 0$, nel quale la α_0 non contiene più la ξ.

Nel primo caso, la equazione (11) diventa:

$$(12)\qquad A_3 + (\alpha_0 - 6\,x)A_1 + \beta_0 = 0,$$

ed i tre valori delle ξ, μ sono dati dalle

$$(13)\qquad \alpha_0 = 3(\xi - \mu^2), \qquad \beta_0 = 2\mu^3 - 6\mu\xi - 2\sqrt{\varphi(\xi)}.$$

Nel secondo, si ha dalla (11):

$$(14)\qquad A_3 + (\alpha_0 - 3\,x)A_1 + \beta_0 + \beta_1 x - \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi} = 0,$$

essendo

$$\beta_1^2 + 3\alpha_0 = 0, \qquad \mu = -\frac{\beta_1}{3}, \tag{15}$$

ed i tre valori di ξ sono dati dalla

$$\beta_0 = 2\mu^3 - 3\mu\xi - \tfrac{1}{2}\sqrt{\varphi(\xi)}. \tag{16}$$

Osserviamo infine che, se nel primo caso si suppone $\beta_0 = 0$, e quindi la equazione (12) riducesi alla

$$A_3 + (\alpha_0 - 6x)A_1 = 0, \tag{17}$$

si ha un solo valore di ξ, cioè:

$$\xi = \frac{1}{9}\frac{\alpha_0^3 - 27g_3}{3g_2 - \alpha_0^2} \quad \text{e quindi} \quad \mu^2 = \frac{1}{9}\frac{4\alpha_0^3 - 9\alpha_0 g_2 - 27g_3}{3g_2 - \alpha_0^2}. \tag{18}$$

Si noti che le equazioni (12), (14) si ponno trasformare l'una nell'altra, solo che nella trasformazione mutano i valori delle costanti, si ottengono cioè differenti equazioni per la determinazione delle ξ, μ.

Infatti, se prendiamo siccome punto di partenza la relazione (6) ossia la

$$A_3 + (a - 6x)A_1 + b = 0, \tag{19}$$

nella quale le a, b hanno i valori (7), si ha dapprima che la (12) coincide colla stessa, se pongasi

$$\alpha_0 = a, \qquad \beta_0 = b,$$

cioè le α_0, β_0 abbiano i valori (13). In secondo luogo, se alla stessa (19) si aggiunge l'equazione identica [vedi la (5)]

$$3(x - \xi)(A_1 - \mu) + \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi(\xi)} - \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi} = 0,$$

si ottiene la

$$A_3 + (a - 3\xi - 3x)A_1 + b + 3\mu\xi + \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi(\xi)} - 3\mu x - \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi} = 0,$$

la quale posta a confronto della (14) dà:

$$\alpha_0 = a - 3\xi = -3\mu^2, \qquad \beta_1 = -3\mu,$$

$$\beta_0 = b + 3\mu\xi + \tfrac{3}{2}\sqrt{\varphi(\xi)},$$

ossia le (15) e la (16).

3. Sia ora

$$A_4 + (\alpha_0 + \alpha_1 x)A_2 + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \sqrt{\varphi})A_1 + \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 \sqrt{\varphi} + \gamma_3 \varphi' = 0;$$

seguendo il metodo indicato più sopra si otterranno fra le costanti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ e le ξ, μ le cinque relazioni:

$$2\mu(\beta_2 + \alpha_1 + 12) + \beta_1 + 2\gamma_2 = 0,$$

$$\beta_2 + \alpha_1 + 12 + 6\gamma_3 = 0,$$

$$(\xi - \mu^2)(2\beta_2 + \alpha_1 + 12) + 2\alpha_0 + \gamma_1 - 2\mu\gamma_2 = 0,$$

$$4\mu^3 + 2\mu[\alpha_0 - (\beta_2 + 6)\xi] + \beta_0 - 2\gamma_2\xi - (\beta_2 + 4)\sqrt{\varphi(\xi)} = 0,$$

$$3\mu^4 + \mu^2[\alpha_0 - 2(\beta_2 + 9)\xi] - 2\mu[\gamma_2\xi + (\beta_2 + 6)\sqrt{\varphi(\xi)}]$$

$$-\gamma_0 + \tfrac{1}{2}(2\gamma_3 + \beta_2 + 6)g_2 - \alpha_0\xi - (2\beta_2 + 9)\xi^2 - \gamma_2\sqrt{\varphi(\xi)} = 0.$$

La condizione che le ξ, μ, od una almeno di esse, abbiano quattro valori dà origine ai seguenti quattro casi:

Caso I. — Se $\alpha_1 + 12 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$; sono anche $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, inoltre:

$$2\alpha_0 + \gamma_1 = 0,$$

$$4\mu^3 + 2\mu(\alpha_0 - 6\xi) + \beta_0 - 4\sqrt{\varphi(\xi)} = 0,$$

$$3\mu^4 + \mu^2(\alpha_0 - 18\xi) - 12\mu\sqrt{\varphi(\xi)} - \gamma_0 + 3g_2 - \alpha_0\xi - 9\xi^2 = 0,$$

e si ha:

$$A_4 + (\alpha_0 - 12x)A_2 + \beta_0 A_1 + \gamma_0 - 2\alpha_0 x = 0.$$

Caso II. — Se $\alpha_1 + 8 = 0$, $\gamma_3 = 0$; sarà $\beta_2 + 4 = 0$; quindi:

$$\beta_1 + 2\gamma_2 = 0,$$

$$-4(\xi - \mu^2) + 2\alpha_0 + \gamma_1 - 2\mu\gamma_2 = 0,$$

$$4\mu(\mu^2 - \xi) + 2\mu\alpha_0 + \beta_0 - 2\gamma_2\xi = 0.$$

Da queste ultime due si deduce la

$$\gamma_1\mu - \beta_0 = 2\gamma_2(\mu^2 - \xi),$$

per la quale la prima di esse diventa:

$$2\alpha_0\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\mu\gamma_2^2 + 2\mu\gamma_1 - 2\beta_0 = 0,$$

che si decompone nelle due:

$$\gamma_1 = \gamma_2^2, \qquad 2\alpha_0\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2 - 2\beta_0 = 0.$$

Si hanno così fra i coefficienti le tre relazioni:

$$\gamma_2 = -\tfrac{1}{2}\beta_1, \qquad \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\beta_1^2, \qquad 8\alpha_0\beta_1 + \beta_1^3 + 16\beta_0 = 0,$$

e le due equazioni fra le ξ, μ:

$$4(\mu^2 - \xi) + 2\alpha_0 + \tfrac{1}{4}\beta_1^2 + \beta_1\mu = 0,$$

$$3\mu^4 + \mu^2(\alpha_0 - 10\xi) + \mu[\beta_1\xi - 4\sqrt{\varphi(\xi)}] - \gamma_0 + g_2 - \alpha_0\xi - \xi^2 + \tfrac{1}{2}\beta_1\sqrt{\varphi(\xi)} = 0,$$

o sostituendo nella seconda il valore di α_0 dato dalla prima:

$$2\mu^4 - 12\mu^2\xi - 8\mu\sqrt{\varphi(\xi)} - 6\xi^2 - \beta_1[\mu^3 - 3\mu\xi - \sqrt{\varphi(\xi)}]$$
$$- \tfrac{1}{4}\beta_1^2(\mu^2 - \xi) - 2\gamma_0 + 2g_2 = 0.$$

Colle condizioni superiori sarà:

$$A^4 + (\alpha_0 - 8x)A_2 + (\beta_0 + \beta_1 x - 4\sqrt{\varphi})A_1 + \gamma_0 + \tfrac{1}{4}\beta_1^2 x - \tfrac{1}{2}\beta_1\sqrt{\varphi} = 0.$$

Caso III. — Se $\alpha_1 + 6 = 0$, $\gamma_3 = 0$; sarà $\beta_2 + 6 = 0$, $\beta_1 + 2\gamma_2 = 0$,

$$6(\mu^2 - \xi) + 2\alpha_0 + \gamma_1 + \beta_1\mu = 0,$$

$$4\mu^3 + 2\mu\alpha_0 + \beta_0 + \beta_1\xi + 2\sqrt{\varphi(\xi)} = 0,$$

$$3\mu^4 + \mu^2(\alpha_0 - 6\xi) + \beta_1\mu\xi - \gamma_0 - \alpha_0\xi + 3\xi^2 + \tfrac{1}{2}\beta_1\sqrt{\varphi(\xi)} = 0.$$

Per la condizione relativa ai valori delle ξ, μ dovrà essere $\beta_1 = 0$ e quindi $\gamma_2 = 0$; ciò posto, sostituendo nella seconda e nella terza delle superiori il valore di α_0 dedotto dalla prima, si otterranno le

$$6(\mu^2 - \xi) + 2\alpha_0 + \gamma_1 = 0,$$

$$2\mu^3 - \mu(6\xi - \gamma_1) - \beta_0 - 2\sqrt{\varphi(\xi)} = 0,$$

$$2\gamma_0 + \gamma_1(\mu^2 - \xi) = 0,$$

cioè le prime due equazioni fra le ξ, μ e la relazione fra i coefficienti

$$12\gamma_0 - 2\alpha_0\gamma_1 - \gamma_1^2 = 0.$$

La equazione sarà in questo caso:

$$A_4 + (\alpha_0 - 6x)A_2 + (\beta_0 - 6\sqrt{\varphi})A_1 + \gamma_0 + \gamma_1 x = 0.$$

CASO IV. — Se $\alpha_1 + 4 = 0$, $\beta_2 + 4 = 0$; si ha $\gamma_3 = -\frac{2}{3}$,

$$8\mu + \beta_1 + 2\gamma_2 = 0,$$

$$2\alpha_0 + \gamma_1 - 2\mu\gamma_2 = 0,$$

$$4\mu^3 + 2\mu(\alpha_0 - 2\xi) + \beta_0 - 2\gamma_2\xi = 0,$$

o sostituendo in quest'ultima il valore di α_0 dato dalla seconda:

$$2(2\mu + \gamma_2)(\mu^2 - \xi) + \beta_0 - \gamma_1\mu = 0.$$

Questa è soddisfatta ponendo

$$2\mu + \gamma_2 = 0, \qquad \beta_0 - \gamma_1\mu = 0;$$

quindi si hanno fra i coefficienti le relazioni:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}\beta_1, \qquad 4\beta_0 + \beta_1\gamma_1 = 0, \qquad 8\alpha_0 + 4\gamma_1 + \beta_1^2 = 0,$$

e le ξ, μ saranno date dalle

$$\mu = -\frac{1}{4}\beta_1, \quad 2\mu^4 - (\mu^2 - \xi)\gamma_1 - 8\mu^2\xi - 4\mu\sqrt{\varphi(\xi)} - 2\xi^2 - 2\gamma_0 + \frac{2}{3}g_2 = 0,$$

e con queste condizioni si avrà:

$$A_4 + (\alpha_0 - 4x)A_2 + (\beta_0 + \beta_1 x - 4\sqrt{\varphi})A_1 + \gamma_0 + \gamma_1 x + \frac{1}{2}\beta_1\sqrt{\varphi} - \frac{2}{3}\varphi' = 0.$$

Anche qui ha luogo la osservazione già esposta sul finire del n° 2 rispetto al trasformarsi l'una nell'altra delle equazioni superiori.

4. Dalla equazione (19), rammentando le (3), si ottiene tosto la

$$A_4 + (a - 6x)A_2 + (b - 6\sqrt{\varphi})A_1 = 0,$$

nella quale le a, b hanno sempre i valori (7). Ora, se in quest'ultima poniamo

$$a = \alpha_0 + \frac{1}{2}\gamma_1, \qquad b = \beta_0 - \gamma_1\mu,$$

si avrà pel valore (4) di A_3 la seguente:

$$A_4 + (\alpha_0 - 6x)A_2 + (\beta_0 - 6\sqrt{\varphi})A_1 + \gamma_0 + \gamma_1 x = 0, \tag{20}$$

vale a dire la relazione trovata nel caso III considerato al n° 3.

Ora importa qui osservare che, per la (19), le due equazioni (7) che dànno i tre valori di ξ e di μ si possono porre sotto la forma:

$$\xi = \mu^2 + \frac{1}{3}a, \qquad \sqrt{\varphi(\xi)} = -2\mu^3 - a\mu - \frac{1}{2}b,$$

mentre, per la (20), i quattro valori di ξ e di μ sono dati dalle

$$\xi = \mu^2 + \frac{1}{6}(2\alpha_0 + \gamma_1), \qquad \sqrt{\varphi(\xi)} = -2\mu^3 - \alpha_0\mu - \frac{1}{2}\beta_0;$$

si può quindi concludere che sì nell'uno che nell'altro caso le relazioni fra ξ e μ sono della forma:

$$\xi = \mu^2 + \alpha, \qquad \sqrt{\varphi(\xi)} = -2\mu^3 + \beta\mu + \gamma,$$

essendo α, β, γ tre costanti.

5. Indicando con e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $\varphi(x) = 0$, se poniamo

$$\frac{x - e_1}{e_3 - e_1} = k^2 \operatorname{sn}^2 u, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1},$$

si ha facilmente che, dalla

$$y = \sqrt{x - \xi} \, . \, e^{\frac{1}{2}Z(x)},$$

nella quale

$$Z(x) = \int \frac{2\mu(x - \xi) - \sqrt{\varphi(\xi)}}{(x - \xi)\sqrt{\varphi(x)}} dx,$$

si ha:

$$\frac{d^r y}{du^r} = \frac{A_r y}{(e_3 - e_1)^{\frac{r}{2}}}.$$

Le relazioni lineari trovate sopra fra le A_1, A_2, ... conducono quindi ad altrettante equazioni differenziali lineari d'ordine superiore al secondo integrabili per funzioni ellittiche.

In altro lavoro di prossima pubblicazione daremo le formole generali di queste equazioni *).

6 giugno 1880.

[G.].

*) [LXXVIII: t. II, pp. 209-213].

CXXXVIII.

SULLA ORIGINE DI TALUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VI (1881-82), pp. 42-47.

1. Consideriamo la equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

nella quale $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ e p, q sono funzioni di x. Sieno y_1, y_2 due integrali fondamentali di essa; si hanno, come è noto, le

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = C e^{-\int p dx}, \quad q = \frac{y_2' y_1'' - y_1' y_2''}{y_2 y_1' - y_1 y_2'},$$

essendo C una costante. Suppongasi ora che fra la x ed una nuova variabile z sussista la equazione

$$(2) \qquad f(z, x) = 0,$$

si potranno considerare le y_1, y_2 siccome funzioni di z e si avranno le

$$y_1' = \frac{dy_1}{dz} z', \qquad y_1'' = \frac{d^2 y_1}{dz^2} z'^2 + \frac{dy_1}{dz} z'',$$

ed analogamente per y_2, per le quali:

$$(3) \qquad e^{\int p dx} z' = \varphi(z), \qquad q = \psi(z) z'^2,$$

posto

$$(4)\qquad \varphi(z)=\frac{C}{y_2\dfrac{dy_1}{dz}-y_1\dfrac{dy_2}{dz}},\qquad \psi(z)=\frac{\dfrac{dy_2}{dz}\dfrac{d^2y_1}{dz^2}-\dfrac{dy_1}{dz}\dfrac{d^2y_2}{dz^2}}{y_2\dfrac{dy_1}{dz}-y_1\dfrac{dy_2}{dz}}.$$

Differenziando ora logaritmicamente la prima delle (3), si ottiene la

$$(5)\qquad z''+pz'=a(z)z'^2,$$

nella quale:

$$(6)\qquad a(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

e differenziando di nuovo la penultima si avrà:

$$z'''+pz''+p'z'=a'(z)z'^3+2a(z)z'z'',$$

ed aggiungendo a questa la penultima stessa moltiplicata per $2p$, si giungerà alla

$$(7)\qquad z'''+3pz''+(p'+2p^2)z'=b(z)z'^3,$$

essendo

$$(8)\qquad b(z)=a'(z)+2a^2(z).$$

Ripetendo la stessa operazione, differenziando cioè la (7) ed aggiungendo al risultato la (7) medesima moltiplicata per $3p$, si avrà:

$$(9)\qquad z^{IV}+6pz'''+(4p'+11p^2)z''+(p''+7pp'+6p^3)z'=c(z)z'^4,$$

posto

$$(10)\qquad c(z)=b'(z)+3b(z)a(z),$$

e così di seguito.

D'altra parte dalla seconda delle (3) si deduce la

$$q'=\psi'(z)z'^3+2\psi(z)z'z'',$$

e se a questa si aggiunge il valore di q moltiplicato per $2p$ si avrà, per la (5):

$$(11)\qquad q'+2pq=\alpha(z)z'^3,$$

nella quale:

$$(12)\qquad \alpha(z)=\psi'(z)+2\psi(z)a(z).$$

Analogamente si otterrà:

$$(13)\qquad (q'+2pq)'+3p(q'+2pq)=\beta(z)z'^4,$$

dove:

$$\beta(z) = \alpha'(z) + 3\alpha(z)a(z), \tag{14}$$

e le altre che derivano dal ripetere la stessa operazione.

Sieno ora $l_0, l_1, l_2, \ldots$ dei coefficienti numerici; le equazioni differenziali (7), (11) ed il valore di q conducono tosto alla

$$\begin{aligned} z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + l_0 q)z' + l_1(q' + 2pq)z \\ = [b(z) + l_0\psi(z) + l_1 z\alpha(z)]z'^3, \end{aligned}$$

ossia la z soddisferà la equazione differenziale lineare del terzo ordine

$$z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + l_0 q)z' + l_1(q' + 2pq)z = 0, \tag{15}$$

se fra le funzioni $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sussiste la relazione

$$b(z) + l_0\psi(z) + l_1 z\alpha(z) = 0. \tag{16}$$

Operando nello stesso modo sulle (5), (9), (11), (13) si otterrà la equazione differenziale lineare del quarto ordine

$$\left\{ \begin{aligned} & z^{IV} + 6pz''' + (4p' + 11p^2 + l_0 q)z'' \\ & + [p'' + 7pp' + 6p^3 + l_0 pq + l_1(q' + 2pq)]z' \\ & + l_2[(q' + 2pq)' + 3p(q' + 2pq)]z + l_3 q^2 z = 0, \end{aligned} \right. \tag{17}$$

quando sussista la

$$c(z) + l_0\psi(z)a(z) + l_1\alpha(z) + l_2\beta(z)z + l_3\psi^2(z)z = 0. \tag{18}$$

Nello stesso modo ed alle stesse condizioni si avranno equazioni differenziali in z di più alto ordine.

Queste equazioni differenziali, per certi valori particolari dei coefficienti numerici l_0, l_1, l_2 sono già note; per esempio, se nella (15) si suppongono $l_0 = 4$, $l_1 = 2$, la z che soddisfa quella equazione è una forma quadratica a coefficienti costanti degli integrali fondamentali y_1, y_2; se nella (17) si suppongono $l_0 = 10$, $l_1 = 10$, $l_2 = 3$, $l_3 = 9$, la z è una forma cubica degli stessi integrali e così via.

2. Applichiamo questi risultati alla ricerca di talune equazioni differenziali lineari che si incontrano nella teorica delle funzioni ellittiche. Indicheremo con x l'invariante

assoluto, ossia

$$x = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 k'^4},$$

e con z la espressione

$$z = \sqrt{\mu} \left(\frac{\lambda \lambda'}{k k'}\right)^{\frac{1}{6}}, \tag{19}$$

nelle quali le λ, λ', k, k', $\mu = \frac{1}{M}$ hanno le indicazioni date a quelle lettere da JACOBI.

È noto che nella trasformazione del quinto ordine la relazione (2) fra x e z si presenta sotto l'una o l'altra delle seguenti forme:

$$x = -\frac{P^3}{12^3 z^6}, \qquad 1 - x = \frac{QR^2}{12^3 z^6}, \tag{20}$$

nelle quali

$$P = z^{12} - 10z^6 + 5, \qquad Q = z^{12} - 22z^6 + 125, \qquad R = z^{12} - 4z^6 - 1.$$

Dalla prima di esse si ha tosto:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{P^2}{12^3 z^7}\left(3z\frac{dP}{dz} - 6P\right),$$

e siccome

$$z\frac{dP}{dz} - 2P = 10R,$$

si giungerà alla

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{5}{2 \cdot 12^2} \frac{P^2 R}{z^7}.$$

D'altra parte dalle (20) si ottiene:

$$60\sqrt{3}\, x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - x} = \frac{5}{2.12^2} \frac{P^2 R Q^{\frac{1}{2}}}{z^7},$$

sarà quindi

$$60\sqrt{3}\, x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - x}\, z' = -Q^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

ossia, ponendo

$$p = \frac{1}{6} \frac{4 - 7x}{x(1 - x)}, \tag{22}$$

si avrà:

$$60\sqrt{3}\, e^{\int p dx} z' = -Q^{\frac{1}{2}},$$

la quale posta a confronto colla prima delle (3) dà:

$$\varphi(z) = -\frac{Q^{\frac{1}{2}}}{60\sqrt{3}}.$$

Pongasi

$$q = \frac{m}{x(1-x)}, \tag{23}$$

indicando con m un coefficiente numerico da determinarsi; ora, essendo per l'equazione (21)

$$\frac{1}{x(1-x)} = 60^2 . 3 \frac{x^{\frac{1}{3}} z'^2}{Q},$$

si avrà per la prima delle (20):

$$\frac{1}{x(1-x)} = -30^2 \frac{P}{z^2 Q} z'^2,$$

e quindi dal confronto colla seconda delle (3) si avrà:

$$\psi(z) = -30^2 m \frac{P}{z^2 Q}.$$

Ottenuti così i valori di $\varphi(z)$ e di $\psi(z)$, si deducono dai medesimi, per questo caso, i valori seguenti:

$$a(z) = \frac{1}{2}\frac{Q'(z)}{Q(z)}, \qquad b(z) = \frac{1}{2}\frac{Q''(z)}{Q(z)}, \qquad \alpha(z) = -10.30^2 m \frac{R}{z^3 Q},$$

pei quali la equazione di condizione (16) diventa la

$$z^2 Q''(z) - 2.30^2 m (l_0 P + 10 l_1 R) = 0,$$

e dal confronto dei coefficienti delle stesse potenze della z si hanno le

$$150 m (l_0 + 10 l_1) = 11, \qquad 300 m (l_0 + 4 l_1) = 11, \qquad l_0 - 2 l_1 = 0,$$

di cui la terza è conseguenza delle altre due. Uno dei tre coefficienti numerici l_0, l_1, m rimane perciò arbitrario, e supponendo $l_1 = 2$ si ottengono i valori:

$$l_0 = 4, \qquad m = \frac{11}{3600}.$$

Dunque la z definita dalla espressione (19) soddisfa l'equazione differenziale del

terzo ordine (15), nella quale $l_0 = 4$, $l_1 = 2$; la z eguaglia cioè una forma quadratica a coefficienti costanti di due integrali fondamentali della equazione differenziale lineare del secondo ordine (1), supposto che p, q abbiano i valori (22) e (23). La equazione differenziale (1), siccome è noto, è in questo caso ipergeometrica.

3. Passiamo alla trasformazione del settimo ordine. La relazione fra z ed x è data dalle

$$x = -\frac{1}{12^3}\cdot\frac{PQ^3}{z^4}, \qquad 1 - x = \frac{1}{12^3}\cdot\frac{R^2}{z^4},$$

nelle quali:

$$P = z^8 - 13z^4 + 49, \qquad Q = z^8 - 5z^4 + 1,$$

$$R = z^{16} - 14z^{12} + 63z^8 - 70z^4 - 7.$$

Osservando che si ha identicamente

$$3zP\frac{dQ}{dz} + zQ\frac{dP}{dz} - 4PQ = 28R,$$

si otterrà dapprima:

$$56\sqrt{3}\,x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x}\,z' = -z^{\frac{1}{3}}P^{\frac{2}{3}};$$

poi per quest'ultima e pel valore di x:

$$\frac{m}{x(1-x)} = -28^2 m\frac{Qz'^2}{z^2P}.$$

I valori delle funzioni $\varphi(z)$, $\psi(z)$ saranno perciò nel caso attuale:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{56\sqrt{3}}z^{\frac{1}{3}}P^{\frac{2}{3}}, \qquad \psi(z) = -28^2 m\frac{Q}{z^2P},$$

supponendo sempre le p, q rappresentate dalle (22), (23); e da essi si dedurranno per le $a(z)$, $b(z)$, ... le espressioni seguenti:

$$a(z) = \frac{1}{3zP}\left(P + 2z\frac{dP}{dz}\right),$$

$$b(z) = \frac{1}{9z^2P^2}\left[6z^2P\frac{d^2P}{dz^2} + 2z^2\left(\frac{dP}{dz}\right)^2 + 8zP\frac{dP}{dz} - P^2\right],$$

$$c(z) = \frac{1}{9z^3P^2}\left[6z^3P\frac{d^3P}{dz^3} + 10z^3\frac{dP}{dz}\frac{d^2P}{dz^2} + 14z^2P\frac{d^2P}{dz^2} + 10z^2\left(\frac{dP}{dz}\right)^2 - 2zP\frac{dP}{dz} + P^2\right],$$

$$\alpha(z) = -\frac{28^3}{3} m \frac{R}{z^3 P^2}, \qquad \beta(z) = -\frac{28^4}{6} m \frac{Q^2}{z^4 P^2},$$

per dedurre l'ultima delle quali deve notarsi essere identicamente

$$z \frac{dR}{dz} - 2R = 14\, Q^2.$$

Perciò indicando con S il numeratore del valore di $c(z)$, e sostituendo questi valori nella equazione di condizione (18), dimostrasi dovere essere

$$3.28^2 m \left[l_0 Q \left(P + 2z \frac{dP}{dz} \right) + 28\, l_1 R + 14.28\, l_2 Q^2 - 3.28^2 m\, l_3 Q^2 \right] = S,$$

nella quale confrontando i coefficienti delle stesse potenze di z si ottengono le tre sole relazioni seguenti:

$$7.8.9\, m\, l_0 = 37, \qquad 7^3.8.9\, m\, l_1 = 11.47,$$
$$2.7^3.8^2 m (l_2 - 6 m\, l_3) = 3^2.19.$$

Delle cinque quantità l_0, l_1, l_2, l_3, m due sono quindi arbitrarie. Pongo

$$m = -\frac{13}{3^2.4^2.7^2}, \qquad l_3 = 3\, l_2,$$

si otterranno le

$$l_0 = -\frac{2.7.37}{13}, \qquad l_1 = -\frac{2.11.47}{7.13}, \qquad l_2 = -\frac{7.19}{5.13}.$$

La equazione differenziale del secondo ordine (1) sarà perciò anche in questo caso una equazione ipergeometrica e precisamente quella per la quale le tre note quantità λ, μ, ν hanno i valori:

$$\lambda = \tfrac{1}{3}, \qquad \mu = \tfrac{1}{7}, \qquad \nu = \tfrac{1}{2}.$$

4. Nella trasformazione del 13° ordine si può giungere ad analoghi risultati. La equazione $f(z, x) = 0$ assume l'una o l'altra delle forme *)

$$x = -\frac{1}{12^3} \frac{P Q^3}{z^2}, \qquad 1 - x = \frac{1}{12^3} \frac{R S^2}{z^2},$$

essendo

$$P = z^4 - 5z^2 + 13, \qquad Q = z^8 - 7z^6 + 20z^4 - 19z^2 + 1,$$
$$R = z^4 - 6z^2 + 13, \qquad S = z^{12} - 10z^{10} + 46z^8 - 108z^6 + 122z^4 - 38z^2 - 1.$$

*) [V. CXXV: t. III, pp. 307-317 (pag. 316)].

Osservando alla identità

$$z\left(3P\frac{dQ}{dz}+Q\frac{dP}{dz}\right)-2PQ=2^6 S,$$

si ottiene facilmente la relazione

$$52\sqrt{3}\,x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x}\,z'=-z^{\frac{2}{3}}P^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{2}},$$

donde si deduce:

$$\varphi(z)=-\frac{1}{52\sqrt{3}}z^{\frac{2}{3}}P^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{2}},$$

e pel valore (23) di q si avrà:

$$\psi(z)=-2^6{}^2 m\frac{Qz'^2}{z^2PR}.$$

Queste espressioni di $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ condurranno col metodo sopra indicato ad una equazione differenziale lineare del settimo ordine in z, di cui i coefficienti saranno funzioni delle p, q e loro derivate rispetto ad x.

4 dicembre 1881.

[G.].

CXXXIX.

LE RELAZIONI ALGEBRICHE FRA LE FUNZIONI IPERELLITTICHE DEL PRIMO ORDINE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VII (1882-83), pp. 137-140.

È noto che fra le tre funzioni ellittiche $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sussistono le due relazioni

$$(1) \qquad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

per le quali i quadrati di due fra esse si esprimono in funzione razionale intiera del quadrato della terza. Per le quindici funzioni iperellittiche del primo ordine la proprietà corrispondente si è che i quadrati di dodici fra esse si possono esprimere in funzioni razionali intiere dei quadrati delle altre tre.

Definiremo le quindici funzioni iperellittiche nel modo seguente. Posto

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2), \qquad P(x) = (x - a_1)(x - a_2),$$
$$Q(x) = A(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5), \qquad R(x) = P(x)\,Q(x),$$

e indicando con l_r una quantità eguale a $P(a_r)$, se $r > 2$, ed eguale a $-Q(a_r)$, se $r \leq 2$; le espressioni

$$p_r = \sqrt{\frac{\varphi(a_r)}{l_r}},$$

$$p_{rs} = p_{sr} = \frac{p_r p_s}{x_1 - x_2}\left[\frac{\sqrt{R(x_1)}}{(x_1 - a_r)(x_1 - a_s)} - \frac{\sqrt{R(x_2)}}{(x_2 - a_r)(x_2 - a_s)}\right],$$

nelle quali r, s possono assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5, sono le quindici funzioni iper-

ellittiche del primo ordine. Fra esse sussistono alcune relazioni analoghe alle (1), le quali si possono ridurre alle sei seguenti. Le lettere μ, m, n, r, s rappresentino ciascuna uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, ma differenti fra loro, e poniamo per brevità $(rs)=a_r-a_s$.

Sieno

$$\alpha=\frac{l_\mu}{(\mu r)(\mu s)},\quad \beta=\frac{l_r}{(r\mu)(rs)},\quad \gamma=\frac{l_s}{(s\mu)(sr)},\quad M=\frac{l_m}{A(mn)},\quad N=\frac{l_n}{A(nm)};$$

le sei relazioni sono:

$$\alpha p_\mu^2+\beta p_r^2+\gamma p_s^2=1,$$

$$M(\alpha p_{\mu m}^2+\beta p_{rm}^2+\gamma p_{sm}^2)=1,$$

$$N(\alpha p_{\mu n}^2+\beta p_{rn}^2+\gamma p_{sn}^2)=1,$$

$$\alpha p_{\mu m}p_{\mu n}+\beta p_{rm}p_{rn}+\gamma p_{sm}p_{sn}=0,$$

$$\alpha p_\mu\, p_{\mu n}+\beta p_r\, p_{rn}+\gamma p_s\, p_{sn}=0,$$

$$\alpha p_\mu\, p_{\mu m}+\beta p_r\, p_{rm}+\gamma p_s\, p_{sm}=0.$$

Da esse deducesi dapprima fra le nove funzioni iperellittiche la relazione

$$\begin{vmatrix} p_\mu & p_r & p_s \\ p_{\mu m} & p_{rm} & p_{sm} \\ p_{\mu n} & p_{rn} & p_{sn} \end{vmatrix} = A\,\frac{(mn)(rs)(r\mu)(s\mu)}{\sqrt{l_\mu l_m l_n l_r l_s}};$$

poi deduconsi le altre tre:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt{l_\mu}\cdot p_\mu=\dfrac{\sqrt{l_m l_n l_r l_s}}{A(mn)(rs)}(p_{rm}p_{sn}-p_{rn}p_{sm}), \\[2ex] \sqrt{l_r}\cdot p_r=\dfrac{\sqrt{l_m l_n l_s l_\mu}}{A(mn)(s\mu)}(p_{sm}p_{\mu n}-p_{sn}p_{\mu m}), \\[2ex] \sqrt{l_s}\cdot p_s=\dfrac{\sqrt{l_m l_n l_r l_\mu}}{A(mn)(r\mu)}(p_{\mu n}p_{rm}-p_{\mu m}p_{rn}), \end{cases}$$

ed analoghe.

In secondo luogo, in virtù delle medesime relazioni, si possono esprimere le somme dei quadrati di tre combinazioni a due a due di quelle funzioni per i quadrati delle altre tre. Scegliendo per queste ultime le p_μ, p_{rn}, p_{sm}, si hanno così le

$$M\beta p_{rm}^2 + N\gamma p_{sn}^2 = 1 + \alpha p_\mu^2 - N\beta p_{rn}^2 - M\gamma p_{sm}^2 = P,$$

$$N\alpha p_{\mu n}^2 + \beta p_r^2 = 1 - \alpha p_\mu^2 - N\beta p_{rn}^2 + M\gamma p^2{}_m = Q,$$

$$\gamma p_s^2 + M\alpha p_{\mu m}^2 = 1 - \alpha p_\mu^2 + N\beta p_{rn}^2 - M\gamma p_{sm}^2 = R.$$

Se sopra queste equazioni si opera una prima permutazione sostituendo alle m, n, r, s le s, r, n, m e si indicano con α_1, β_1, γ_1, M_1, N_1 i valori corrispondenti, si ottengono le

$$N_1\gamma_1 p_{rm}^2 + M_1\beta_1 p_{sn}^2 = P_1, \quad N_1\alpha_1 p_{\mu r}^2 + \beta_1 p_n^2 = Q_1, \quad \gamma_1 p_m^2 + M_1\alpha_1 p_{\mu s}^2 = R_1,$$

nelle quali le P_1, Q_1, R_1 si ottengono dalle stesse P, Q, R sostituendo in queste α_1, β_1, ... alle α, β, ... Operando di nuovo la permutazione m, r, n, s, si ottengono le

$$M_2\beta_2 p_{mn}^2 + N_2\gamma_2 p_{rs}^2 = P_2, \quad N_2\alpha_2 p_{\mu r}^2 + \beta_2 p_n^2 = Q_2, \quad \gamma_2 p_s^2 + M_2\alpha_2 p_{\mu m}^2 = R_2,$$

essendo le α_2, β_2, ... dedotte dalle α, β, ... con quella permutazione.

Da ultimo la permutazione s, n, r, m conduce alle

$$N_3\gamma_3 p_{mn}^2 + M_3\beta_3 p_{rs}^2 = P_3, \quad N_3\alpha_3 p_{\mu n}^2 + \beta_3 p_r^2 = Q_3, \quad \gamma_3 p_m^2 + M_3\alpha_3 p_{\mu s}^2 = R_3.$$

Queste dodici equazioni dimostrano tosto che si possono dedurre linearmente i valori dei quadrati delle dodici funzioni p_m, p_n, p_r, p_s; $p_{\mu m}$, $p_{\mu n}$, $p_{\mu r}$, $p_{\mu s}$; p_{rm}, p_{sn}, p_{mn}, p_{rs} in funzione dei quadrati delle tre p_μ, p_{rn}, p_{sm}. I valori stessi sono:

$$(M_1\alpha_1\gamma_3 - M_3\alpha_3\gamma_1)p_m^2 = M_1\alpha_1 R_3 - M_3\alpha_3 R_1,$$

$$(M_1\alpha_1\gamma_3 - M_3\alpha_3\gamma_1)p_{\mu s}^2 = \gamma_3 R_1 - \gamma_1 R_3,$$

$$(N\alpha\beta_3 - N_3\alpha_3\beta)p_r^2 = N\alpha Q_3 - N_3\alpha_3 Q,$$

$$(N\alpha\beta_3 - N_3\alpha_3\beta)p_{\mu n}^2 = \beta_3 Q - \beta Q_3,$$

$$(MM_1\beta\beta_1 - NN_1\gamma\gamma_1)p_{rm}^2 = M_1\beta_1 P - N\gamma P_1,$$

$$(MM_1\beta\beta_1 - NN_1\gamma\gamma_1)p_{sn}^2 = M\beta P_1 - N_1\gamma_1 P,$$

$$(N_1\alpha_1\beta_2 - N_2\alpha_2\beta_1)p_n^2 = N_1\alpha_1 Q_2 - N_2\alpha_2 Q_1,$$

$$(N_1\alpha_1\beta_2 - N_2\alpha_2\beta_1)p_{\mu r}^2 = \beta_2 Q_1 - \beta_1 Q_2,$$

$$(M\alpha\gamma_2 - M_2\alpha_2\gamma)p_s^2 = M\alpha R_2 - M_2\alpha_2 R,$$

$$(M\alpha\gamma_2 - M_2\alpha_2\gamma)p_{\mu m}^2 = \gamma_2 R - \gamma R_2,$$

$$(M_2M_3\beta_2\beta_3 - N_2N_3\gamma_2\gamma_3)p_{mn}^2 = M_3\beta_3 P_2 - N_2\gamma_2 P_3,$$

$$(M_2M_3\beta_2\beta_3 - N_2N_3\gamma_2\gamma_3)p_{rs}^2 = M_2\beta_2 P_3 - N_3\gamma_3 P_2.$$

Lo sviluppo di queste relazioni non presenta difficoltà alcuna; ci limiteremo perciò a quello delle due fra esse che dànno pei valori p^2_{rm}, p^2_{sn} le seguenti espressioni:

$$\frac{D\,l_m l_r}{A(mn)(rs)} p^2_{rm} = (sn)(m\mu)(r\mu) + (mr)\,l_\mu p^2_\mu - \frac{(m\mu)}{A(mn)} l_n l_r p^2_{rn} + \frac{(r\mu)}{A(rs)} l_m l_s p^2_{sm},$$

$$\frac{D\,l_n l_s}{A(mn)(rs)} p^2_{sn} = (mr)(n\mu)(s\mu) + (sn)\,l_\mu p^2_\mu + \frac{(s\mu)}{A(rs)} l_n l_r p^2_{rn} - \frac{(n\mu)}{A(mn)} l_m l_s p^2_{sm},$$

essendo

$$D = (m\mu)(s\mu) - (n\mu)(r\mu) = (mr)(s\mu) - (ns)(r\mu) = (mn)(s\mu) - (rs)(n\mu).$$

Se ora osservasi che dalla prima delle relazioni (2) si deduce la

$$\frac{\sqrt{l_m l_n l_r l_s}}{A(mn)(rs)} p_{rm} p_{sn} = \sqrt{l_\mu}\cdot p_\mu + \frac{\sqrt{l_m l_n l_r l_s}}{A(mn)(rs)} p_{rn} p_{sm},$$

si vede tosto che, moltiplicando fra loro le due precedenti e sottraendo dal prodotto il quadrato di quest'ultima moltiplicato per D^2, il primo membro si annulla ed il secondo sarà una espressione del quarto grado in p_μ, p_{rn}, p_{sm}. In altre parole le tre funzioni p_μ, p_{rn}, p_{sm}, pei quadrati delle quali si possono esprimere i quadrati delle altre dodici, sono legati fra loro da una equazione del quarto grado. Ponendo

$$a = (mn)(ns)(r\mu), \qquad c = (rs)(mr)(n\mu),$$

$$b = (mn)(mr)(s\mu), \qquad d = (rs)(ns)(m\mu),$$

$$g = (mn)(rs)(mr)(ns), \qquad h = (m\mu)(n\mu)(r\mu)(s\mu),$$

e quindi

$$ac = g(n\mu)(r\mu), \qquad bd = g(m\mu)(s\mu),$$

può darsi a questa equazione la forma rimarchevole assegnatale la prima volta da Göpel, cioè

$$0 = 1 + X^4 + Y^4 + Z^4 + 2\frac{D^2}{\sqrt{gh}} XYZ$$

$$-\frac{ac+bd}{\sqrt{abcd}}(X^2 + Y^2 Z^2) + \frac{a+c}{\sqrt{ac}}(Y^2 + Z^2 X^2) - \frac{b+d}{\sqrt{bd}}(Z^2 + X^2 Y^2),$$

nella quale:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} l_\mu p^2_\mu = X^2, \qquad \frac{l_n l_r}{A\sqrt{ac}} p^2_{rn} = Y^2, \qquad \frac{l_m l_s}{A\sqrt{bd}} p^2_{sm} = Z^2.$$

Si possono sull'argomento consultare i seguenti lavori:

WEIERSTRASS, *Zur Theorie der* ABEL'*schen Functionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XLVII (1854), pp. 289-306; t. LII (1856), pp. 285-380].

ROSENHAIN, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe* [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. XI (1851), pp. 361-468].

GÖPEL, *Theoriæ transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XXXV (1847), pp. 277-312].

CAYLEY, *A Memoir on the single and double Theta-Functions* [Philosophical Transactions of the Royal Society of London, t. CLXXI (1880), pp. 897-1002].

BRIOSCHI, *La relazione di* GÖPEL *per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque* [LXXXII: t. II, pp. 247-259].

4 febbraio 1883.

[G.].

CXL.

SOPRA UNA CLASSE DI CURVE DEL 4° ORDINE.

Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, Transunti, volume VIII (1883-84), pp. 164-168.

1. La classe di curve del quarto ordine che considero in questa Nota ha qualche importanza per sè stessa, ma più ancora per le relazioni sue colla teorica delle funzioni ellittiche.

È noto che qualunque forma ternaria dell'ordine n, $f(x_1, x_2, x_3)$, ha un covariante $S(x_1, x_2, x_3)$ dell'ordine $4(n-3)$ corrispondente all'invariante di quarto grado trovato da Aronhold per le forme ternarie cubiche.

Se la forma f è di quarto ordine lo sarà pure il covariante S; si potranno quindi ricercare le condizioni alle quali deve soddisfare la forma f, perchè essa venga riprodotta dalla S od in altre parole perchè le f, S non differiscano che di un coefficiente costante.

Ponendo

$$f_{rst} = \frac{1}{2.3.4} \frac{\partial^3 f}{\partial x_r \partial x_s \partial x_t},$$

$$A_0 = f_{122}f_{133} - f_{123}^2, \qquad A_6 = f_{112}f_{113} - f_{111}f_{123},$$

$$A_1 = f_{111}f_{133} - f_{113}^2, \qquad A_7 = f_{112}f_{123} - f_{122}f_{113},$$

$$A_2 = f_{222}f_{233} - f_{223}^2, \qquad A_8 = f_{122}f_{333} + f_{133}f_{223} - 2f_{123}f_{233},$$

$$A_3 = f_{111}f_{122} - f_{112}^2, \qquad A_9 = f_{113}f_{123} - f_{112}f_{133},$$

$$A_4 = f_{333}f_{223} - f_{233}^2, \qquad A_{10} = f_{133}f_{222} + f_{122}f_{233} - 2f_{123}f_{223},$$

$$A_5 = f_{222}f_{333} - f_{223}f_{233},$$

il covariante S si può esprimere nel modo seguente:

$$\tfrac{1}{4}S = A_0^2 + A_1 A_2 + A_3 A_4 + A_5 A_6 + A_7 A_8 + A_9 A_{10}.$$

Suppongasi che per la data forma f sieno

$$f_{123} = 0, \quad f_{233} = 0, \quad f_{311} = 0, \quad f_{122} = 0,$$

si avrà:

$$\tfrac{1}{4}S = -(f_{111}f_{331}f_{223}^2 + f_{222}f_{112}f_{331}^2 + f_{333}f_{223}f_{112}^2);$$

ora una forma f che soddisfi alle condizioni superiori è necessariamente la seguente:

$$f = \alpha x_1^4 + \beta x_2^4 + \gamma x_3^4 + 4a x_2^3 x_3 + 4b x_3^3 x_1 + 4c x_1^3 x_2,$$

e la corrispondente forma S sarà:

$$S = -4[abc(a x_2^3 x_3 + b x_3^3 x_1 + c x_1^3 x_2) + x_1 x_2 x_3(\beta b^2 c x_3 + \gamma c^2 a x_1 + \alpha a^2 b x_2)].$$

Se infine supponiamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, si ottiene

$$S = -abcf,$$

e si ha il teorema:

La forma ternaria del quarto ordine

$$f = a x_2^3 x_3 + b x_3^3 x_1 + c x_1^3 x_2$$

ha la proprietà di riprodursi nel proprio covariante S.

2. Consideriamo la specie di curve del quarto ordine rappresentate dalla equazione

$$f = x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0, \tag{1}$$

nella quale si sono supposte $a = b = c = 1$, ciò che evidentemente non altera la generalità dei risultati.

Sia

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0 \tag{2}$$

una tangente doppia alla curva $f = 0$; essa, come ho dimostrato in altra occasione *), sarà tangente comune a due curve l'una della nona classe, l'altra della classe dodicesima.

Per determinare le equazioni di queste ultime due curve, si indichino con

$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

*) *Studii analitici sulle curve del quarto ordine* [LXXI: t. II, pp. 141-155, (pag. 143)].

la equazione che risulta dalla eliminazione di x_3 fra le (1), (2), e con

$$\psi(x_1, x_2), \qquad \delta(x_1, x_2), \qquad s$$

i covarianti di quarto e di sesto ordine e l'invariante quadratico della forma φ. Ciò posto, le equazioni di quelle curve sono le

$$\delta_0 = 0, \qquad s\varphi_0^2 - 12\psi_0^2 = 0,$$

nelle quali φ_0, ψ_0, δ_0 sono i valori delle φ, ψ, δ nelle quali alle x_1, x_2 siensi sostituite le y_2, $-y_1$.

Eseguite le indicate operazioni si ottengono le equazioni seguenti:

$$y_1^9 - 9y_1^6y_2^2y_3 + 15y_1^3y_2^4y_3^2 - 8y_1^2y_2^7 + y_2^6y_3^3 = 0,$$

$$3y_1^{12} - 36y_1^9y_2^2y_3 + 114y_1^6y_2^4y_3^2 - 16y_1^5y_2^7 - 52y_1^3y_2^6y_3^3 - 16y_1^2y_2^9y_3 + 3y_2^8y_3^4 = 0,$$

per le due curve della nona e della dodicesima classe, dalle quali si dedurranno i valori dei rapporti $y_1 : y_2 : y_3$ che sostituiti nella (2) dànno le equazioni delle ventotto tangenti doppie.

Pongasi

$$\frac{y_2^2 y_3}{y_1^3} = y, \qquad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^7 = z^2,$$

le due equazioni superiori diventano le

$$y^3 + 15y^2 - 9y + 1 = 8z^2,$$

$$3y^4 - 52y^3 + 114y^2 - 36y + 3 = 16z^2(y+1),$$

dalle quali eliminando z^2 si giunge ad una equazione del quarto grado in y che si decompone nelle due:

$$y = 1, \qquad y^3 - 83y^2 + 19y - 1 = 0.$$

La prima dà anche $z = 1$, e per le radici della seconda si ha $z = \frac{1}{2}(1 - 7y)$. Indicando quindi con y_0, y_1, y_2 le radici della trovata equazione del terzo grado e con z_0, z_1, z_2 i corrispondenti valori di z, si ha tosto che le 28 tangenti doppie sono rappresentate dalle equazioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varepsilon^s x_1 + \varepsilon^{4s} x_2 + \varepsilon^{2s} x_3 = 0, \\ \varepsilon^s z_r^{\frac{4}{7}} x_1 + \varepsilon^{4s} z_r^{\frac{6}{7}} x_2 + \varepsilon^{2s} y_r x_3 = 0, \end{cases}$$

nelle quali $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, s può assumere i valori 0, 1, 2, ... 6 ed r i valori 0, 1, 2.

La equazione superiore del terzo grado può trasformarsi nella seguente:

$$(3y+1)^3 = 28(1-9y)^2; \tag{4}$$

ponendo

$$\frac{3y+1}{1-9y} = 3t+1, \quad \text{per cui} \quad y = \frac{t}{9t+4},$$

essa diventa la

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0,$$

le radici della quale sono le $t = a, b, c$, posto

$$a = \varepsilon + \varepsilon^6, \qquad b = \varepsilon^2 + \varepsilon^5, \qquad c = \varepsilon^4 + \varepsilon^3.$$

Le tre radici della equazione in y sono quindi le

$$y_0 = \frac{a}{9a+4} = \frac{b^2}{a^4}, \qquad y_1 = \frac{b}{9b+4} = \frac{c^2}{b^4}, \qquad y_2 = \frac{c}{9c+4} = \frac{a^2}{c^4},$$

e siccome dalla relazione superiore fra t, y si ha:

$$1 - 7y = 2\frac{t+2}{9t+4},$$

e sono $a+2=c^2$, $b+2=a^2$, $c+2=b^2$ ed $abc=1$, si ottengono tosto le

$$z_0 = \frac{1}{a^7}, \qquad z_1 = \frac{1}{b^7}, \qquad z_2 = \frac{1}{c^7},$$

e quindi la seconda delle equazioni (3) conduce alle tre seguenti:

$$\left\{ \begin{aligned} &\varepsilon^s x_1 + \varepsilon^{4s} b^2 c^2 x_2 + \varepsilon^{2s} b^2 x_3 = 0, \\ &\varepsilon^s x_1 + \varepsilon^{4s} c^2 a^2 x_2 + \varepsilon^{2s} c^2 x_3 = 0, \\ &\varepsilon^s x_1 + \varepsilon^{4s} a^2 b^2 x_2 + \varepsilon^{2s} a^2 x_3 = 0, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

equazioni di 21 tangenti doppie. Infatti, se indicansi con g_0, g_1, g_2, g_3 i primi membri della prima delle (3) e di queste ultime, si ha facilmente che la forma ternaria f può scriversi come segue:

$$f = g_0 g_1 g_2 g_3 - g^2,$$

essendo g la forma quadratica

$$g = \varepsilon^{2s} x_1^2 + \varepsilon^s x_2^2 + \varepsilon^{4s} x_3^2 + 3(\varepsilon^{6s} x_2 x_3 + \varepsilon^{3s} x_1 x_3 + \varepsilon^{5s} x_1 x_2).$$

La risoluzione della equazione (4) può anche ottenersi sotto un'altra forma che merita di essere notata.

Ponendo

$$1 - 9y = \frac{4}{v^3},$$

si deduce la

$$3y + 1 = \frac{4\sqrt[3]{7}}{v^2},$$

quindi si ha la equazione in v:

$$v^3 - 3\sqrt[3]{7}\,v - 1 = 0,$$

e sarà

$$3t + 1 = v\sqrt[3]{7}.$$

Sia ρ una radice cubica dell'unità, e, posto

$$p = \sqrt[3]{3\rho + 1}, \qquad q = \sqrt[3]{3\rho^2 + 1},$$

si osservi essere

$$pq = \sqrt[3]{7}, \qquad p^3 + q^3 = -1;$$

la equazione superiore potrà perciò scriversi:

$$v^3 + p^3 + q^3 - 3vpq = 0,$$

ossia:

$$(v + p + q)(v + \rho p + \rho^2 q)(v + \rho^2 p + \rho q) = 0,$$

e quindi:

$$3a + 1 = -pq(p + q), \quad 3b + 1 = -pq(\rho p + \rho^2 q), \quad 3c + 1 = -pq(\rho^2 p + \rho q).$$

Ora, essendo

$$a^2 = \frac{c - 2}{b - 2}, \qquad b^2 = \frac{a - 2}{c - 2}, \qquad c^2 = \frac{b - 2}{a - 2},$$

le equazioni (5) si ponno trasformare nelle

$$\varepsilon^{s}(c - 2)x_1 + \varepsilon^{4s}(b - 2)x_2 + \varepsilon^{2s}(a - 2)x_3 = 0, \tag{6}$$

ed analogamente per le altre due permutando le a, b, c; si otterranno così le

$$\varepsilon^{s}\xi_1 x_1 + \varepsilon^{4s}\xi_2 x_2 + \varepsilon^{2s}\xi_3 x_3 = 0,$$

nelle quali:

$$\xi_1 = pq + \frac{\rho}{p} + \frac{\rho^2}{q}, \qquad \xi_2 = pq + \frac{\rho^2}{p} + \frac{\rho}{q}, \qquad \xi_3 = pq + \frac{1}{p} + \frac{1}{q};$$

giungesi cioè per questa via ad una trasformazione della equazione $f = 0$ già indicata dal prof. KLEIN nella sua Memoria *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* *).

3. Le espressioni (5) conducono però ad un'altra trasformazione della equazione $f = 0$ che presenta maggiore interesse.

Ponendo

$$(c-2)g_1 = h_1, \quad (a-2)g_2 = h_2, \quad (b-2)g_3 = h_3,$$

si deducono dalle equazioni stesse le

$$7x_1 = ch_1 + ah_2 + bh_3,$$

$$7x_2 = bh_1 + ch_2 + ah_3,$$

$$7x_3 = ah_1 + bh_2 + ch_3,$$

per le quali si ha:

$$7^4 f = 49 h_1 h_2 h_3 (h_1 + h_2 + h_3) - F^2,$$

essendo

$$F = (h_1 + h_2 + h_3)^2 - 7(h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_1 h_2),$$

saranno cioè le $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$, $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ quattro tangenti doppie, e le altre 24 sono date dalle formole seguenti. Si indichi con $g_{0,s}$ il primo membro della prima delle (3) e con $g_{1,s}$, $g_{2,s}$ $g_{3,s}$ i primi membri delle (6); si hanno le

$$7g_{00} = -(h_1 + h_2 + h_3), \quad g_{10} = h_1, \quad g_{20} = h_2, \quad g_{30} = h_3,$$

poi:

$$7g_{01} = -h_1 + (\omega+3)h_2 - 2(\omega+1)h_3,$$

$$7g_{04} = (\omega+3)h_1 - 2(\omega+1)h_2 - h_3,$$

$$7g_{02} = -2(\omega+1)h_1 - h_2 + (\omega+3)h_3,$$

$$7g_{06} = -h_1 - (\omega-2)h_2 + 2\omega h_3,$$

$$7g_{03} = -(\omega-2)h_1 + 2\omega h_2 - h_3,$$

$$7g_{05} = 2\omega h_1 - h_2 - (\omega-2)h_3,$$

*) [Mathematische Annalen, t. XIV (1879), pp. 428-471].

nelle quali $\omega = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^2$. Analogamente si otterranno le

$$7g_{11} = (3\omega + 5)h_1 - (4\omega + 9)h_2 + (3\omega + 5)h_3,$$

$$7g_{14} = -2(\omega + 4)h_1 + (5\omega + 6)h_2 - (2\omega + 1)h_3,$$

$$7g_{12} = 3(2\omega + 1)h_1 - (\omega - 3)h_2 - (\omega + 4)h_3,$$

$$7g_{16} = -(3\omega - 2)h_1 + (4\omega - 5)h_2 - (3\omega - 2)h_3,$$

$$7g_{13} = 2(\omega - 3)h_1 - (5\omega - 1)h_2 + (2\omega + 1)h_3,$$

$$7g_{15} = -3(2\omega + 1)h_1 + (\omega + 4)h_2 + (\omega - 3)h_3,$$

e le $g_{2,s} = g_{1,4s}$, $g_{3,s} = g_{1,2s}$ permutando le h_1, h_2, h_3 nel primo caso nelle h_2, h_3, h_1 e nel secondo nelle h_3, h_1, h_2. Si osservi infine che i valori di $g_{r,6s}$ si ottengono da quelli di $g_{r,s}$ mutando la ω in $-(\omega + 1)$.

2 marzo 1884.

[G.].

CXLI.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI IPERELLITTICHE DEL PRIMO ORDINE.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 315-318.

1. Sieno x, y, z, w quattro funzioni theta a due argomenti v_1, v_2. Supponiamo dapprima che esse sieno pari e precisamente le

$$x = \vartheta(v_1, v_2), \qquad y = \vartheta_0(v_1, v_2), \qquad z = \vartheta_{23}(v_1, v_2), \qquad w = \vartheta_{14}(v_1, v_2).$$

Indichiamo con l, m, n, s i quattro determinanti seguenti:

$$l = \sum\left(\pm\, y\frac{\partial z}{\partial v_1}\frac{\partial w}{\partial v_2}\right), \qquad m = \sum\left(\pm\, x\frac{\partial w}{\partial v_1}\frac{\partial z}{\partial v_2}\right),$$

$$n = \sum\left(\pm\, x\frac{\partial y}{\partial v_1}\frac{\partial w}{\partial v_2}\right), \qquad s = \sum\left(\pm\, x\frac{\partial z}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial v_2}\right),$$

posto

$$\sum\left(\pm\, y\frac{\partial z}{\partial v_1}\frac{\partial w}{\partial v_2}\right) = \begin{vmatrix} y & z & w \\ \frac{\partial y}{\partial v_1} & \frac{\partial z}{\partial v_1} & \frac{\partial w}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y}{\partial v_2} & \frac{\partial z}{\partial v_2} & \frac{\partial w}{\partial v_2} \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

si vede tosto che i medesimi sono legati alle x, y, z, w dalla relazione:

$$(1) \qquad xl + ym + zn + ws = 0.$$

Ora i quattro determinanti l, m, n, s si ponno esprimere in funzione di x, y, z, w nel modo che segue:

$$(2)\qquad \begin{cases} r l = x^3 + x(a y^2 + b z^2 + c w^2) + d y z w, \\ r m = y^3 + y(a x^2 + b w^2 + c z^2) + d x w z, \\ r n = z^3 + z(a w^2 + b x^2 + c y^2) + d w x y, \\ r s = w^3 + w(a z^2 + b y^2 + c x^2) + d z y x, \end{cases}$$

nelle quali a, b, c, d, r sono costanti rispetto a v_1, v_2. Per la determinazione delle prime quattro di esse, si osservi che, posto $v_1 = v_2 = 0$, le l, m, n, s si annullano, perciò indicando con x_0, y_0, z_0, w_0 i valori delle quattro funzioni ϑ superiori, corrispondenti a $v_1 = v_2 = 0$, si ottengono tosto le

$$a = -\frac{1}{2}\frac{x_0^4 + y_0^4 - z_0^4 - w_0^4}{x_0^2 y_0^2 - z_0^2 w_0^2}, \qquad b = -\frac{1}{2}\frac{x_0^4 + z_0^4 - w_0^4 - y_0^4}{x_0^2 z_0^2 - w_0^2 y_0^2},$$

$$c = -\frac{1}{2}\frac{x_0^4 + w_0^4 - y_0^4 - z_0^4}{x_0^2 w_0^2 - y_0^2 z_0^2}, \qquad d = \frac{1}{2} x_0 y_0 z_0 w_0 \frac{N}{\Delta},$$

essendo

$$N = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2)(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - w_0^2)(x_0^2 - y_0^2 + z_0^2 - w_0^2)(x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + w_0^2),$$

$$\Delta = (x_0^2 y_0^2 - z_0^2 w_0^2)(x_0^2 z_0^2 - w_0^2 y_0^2)(x_0^2 w_0^2 - y_0^2 z_0^2).$$

Infine per determinare il valore di r si aumenti uno degli argomenti v_1, v_2 di un mezzo periodo, e si pongano dopo nuovamente $v_1 = v_2 = 0$; si otterrà per alcune note relazioni essere

$$r^2 = -\frac{1}{4}\frac{N}{\Delta}.$$

Le quattro relazioni (2), che sono così completamente definite, possono tener luogo, nella trasformazione delle funzioni ϑ, della equazione biquadratica di GÖPEL, essendo questa una conseguenza delle medesime. Infatti l'equazione di GÖPEL non è altro che la relazione identica (1).

In altri termini, se si indicano con p, q, t, u quattro funzioni ϑ trasformate, per le quali si possono assumere le

$$p = \vartheta(u_1, u_2), \qquad q = \vartheta_0(u_1, u_2), \qquad t = \vartheta_{23}(u_1, u_2), \qquad u = \vartheta_{14}(u_1, u_2),$$

si avrà che le quattro funzioni omogenee di grado k (per una trasformazione d'ordine k) in x, y, z, w dovranno soddisfare a quattro relazioni.

2. Si rappresentino con λ, μ, ν, σ quattro determinanti formati colle p, q, t, u e le loro derivate rispetto ad u_1, u_2, come gli l, m, n, s lo sono colle x, y, z, w e loro derivate rispetto a v_1, v_2; si avranno le

$$p\lambda + q\mu + t\nu + u\sigma = 0,$$

e

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho\lambda = p^3 + p(\alpha q^2 + \beta t^2 + \gamma u^2) + \delta q t u, \\ \rho\mu = q^3 + q(\alpha p^2 + \beta u^2 + \gamma t^2) + \delta t p u, \\ \rho\nu = t^3 + t(\alpha u^2 + \beta p^2 + \gamma q^2) + \delta u p q, \\ \rho\sigma = u^3 + u(\alpha t^2 + \beta q^2 + \gamma p^2) + \delta t q p, \end{cases}$$

nelle quali i coefficienti α, β, γ, δ, ρ saranno funzioni di p_0, q_0, t_0, u_0 affatto analoghe a quelle trovate sopra per le funzioni ϑ originarie.

Come è noto, le p, q, t, u per una trasformazione d'ordine k, si possono esprimere per mezzo di funzioni omogenee del grado k delle x, y, z, w aventi ciascuna un numero $\frac{k^2+1}{2}$ di coefficienti indeterminati *).

Si indichi con D il determinante funzionale delle p, q, t, u, ossia

$$D = \sum \left(\pm \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial w} \right),$$

e si moltiplichi questo determinante, che sarà una funzione omogenea delle x, y, z, w del grado $4(k-1)$, per ciascuno dei determinanti l, m, n, s. Ponendo

$$U = \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} - \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \frac{\partial u_2}{\partial v_1},$$

*) HERMITE, *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XL (1855), pp. 249-254, 304-309, 365-369, 427-431, 485-489, 536-541, 704-707, 784-787]. — KRAUSE, *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre* [Acta Mathematica, t. III (1883-84), pp. 153-180].

si ottengono le quattro relazioni:

$$D\,l = k\,U\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial q}{\partial x} + \nu\frac{\partial t}{\partial x} + \sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$Dm = k\,U\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\frac{\partial q}{\partial y} + \nu\frac{\partial t}{\partial y} + \sigma\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$D\,n = k\,U\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial q}{\partial z} + \nu\frac{\partial t}{\partial z} + \sigma\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$D\,s = k\,U\left(\lambda\frac{\partial p}{\partial w} + \mu\frac{\partial q}{\partial w} + \nu\frac{\partial t}{\partial w} + \sigma\frac{\partial u}{\partial w}\right),$$

alle quali devono soddisfare le funzioni p, q, t, u. Evidentemente in ciascuna di queste equazioni, tanto i primi che i secondi membri sono funzioni omogenee in x, y, z, w del grado $4k - 1$; ma, ricavando da esse le λ, μ, ν, σ, si giunge infine alle relazioni di grado $3k$ seguenti:

$$(4)\qquad \begin{cases} k\,U\lambda - \sum\left(\pm\, l\,\frac{\partial q}{\partial y}\,\frac{\partial t}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial w}\right) = 0, \\ k\,U\mu - \sum\left(\pm\,\frac{\partial p}{\partial x}\,m\,\frac{\partial t}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial w}\right) = 0, \\ k\,U\nu - \sum\left(\pm\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial q}{\partial y}\,n\,\frac{\partial u}{\partial w}\right) = 0, \\ k\,U\sigma - \sum\left(\pm\,\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{\partial q}{\partial y}\,\frac{\partial t}{\partial z}\,s\right) = 0. \end{cases}$$

3. Posto

$$p = F(x, y, z, w),$$

risulta facilmente da queste relazioni dover essere

$$q = F(y, x, w, z), \qquad t = F(z, w, x, y), \qquad u = F(w, z, y, x);$$

si avranno cioè per la trasformazione del 3° ordine

$$p = g x^3 + x(Ay^2 + Bz^2 + Cw^2) + Dyzw,$$

$$q = g y^3 + y(Ax^2 + Bw^2 + Cz^2) + Dxwz,$$

$$t = g z^3 + z(Aw^2 + Bx^2 + Cy^2) + Dwxy,$$

$$u = g w^3 + w(Az^2 + By^2 + Cx^2) + Dzyx,$$

A, B, C, D, g essendo i cinque coefficienti indeterminati. Sostituendo questi valori di p, q, t, u nelle equazioni (3), si otterranno i valori delle λ, μ, ν, σ espressi in funzione di x, y, z, w; e quindi da una qualsivoglia delle (4) si dedurrà una serie di relazioni fra i suddetti cinque coefficienti e gli a, b, c, d, r; α, β, γ, δ, ρ. Supponendo $U = 1$, si ottengono dapprima le

$$\frac{3}{\rho} g^3 = \frac{1}{r} ABC,$$

$$\alpha A^2 = g(3ga - 2A), \qquad \beta B^2 = g(3gb - 2B), \qquad \gamma C^2 = g(3gc - 2C),$$

per le quali ultime, posto

$$f = \pm\sqrt{1 + 3a\alpha}, \qquad h = \pm\sqrt{1 + 3b\beta}, \qquad k = \pm\sqrt{1 + 3c\gamma},$$

si hanno le

$$\alpha A = g(f - 1), \qquad \beta B = g(h - 1), \qquad \gamma C = g(k - 1),$$

e quindi, per la prima, si giungerà alla equazione modulare:

$$3\frac{\alpha\beta\gamma}{\rho} = \frac{1}{r}(f - 1)(h - 1)(k - 1),$$

che può anche scriversi:

$$9\frac{abc}{r} = \frac{1}{\rho}(f + 1)(h + 1)(k + 1).$$

Così trovasi:

$$D(f + h + k - 2) = 3\frac{g}{\rho}(d\rho - \delta r),$$

cioè le A, B, C, D sono determinate quando lo sia g.

Pel caso di $k = 5$, posto

$$p = gx^5 + x^3(Ay^2 + Bz^2 + Cw^2) + x(Ly^4 + Mz^4 + Nw^4 + Pz^2w^2 + Qw^2y^2 + Ry^2z^2)$$
$$+ yzw(Fy^2 + Gz^2 + Hw^2),$$

e deducendo q, t, u colle permutazioni sopra indicate, si hanno analogamente le

$$\frac{5}{\rho} g^3 = \frac{1}{r} LMN,$$

$$\alpha L^2 = g(5ga - 2A), \qquad \beta M^2 = g(5gb - 2B), \qquad \gamma N^2 = g(5gc - 2C).$$

Così per la determinazione delle L, M, N si ottengono le tre equazioni del quarto grado:

$$(\alpha^2 - 2)L^4 + 4g\alpha^2 L^3 + 10g^2 a\alpha L^2 - 4g^3(5a\alpha + 2)L + 5g^4(2 - 3a^2) = 0,$$

e le altre due che si deducono da questa sostituendo alle a, α le b, β ovvero le c, γ. I valori di L, M, N conducono tosto alla equazione modulare, ed a quelli di A, B, C; e procedendo nello stesso modo si otterranno i valori degli altri coefficienti.

3 maggio 1885.

[Pa.], [G.].

CXLII.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DELLA RIDOTTA DELL'EQUAZIONE MODULARE DI OTTAVO GRADO.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 514-516, 583-586.

1. La riduzione della equazione modulare dell'ottavo grado al settimo è dovuta al sig. HERMITE. Il risultato della medesima trovasi in una lettera direttami nel dicembre 1858 e pubblicata negli « Annali di Matematica » *). Precedentemente però, cioè nella seduta del 22 aprile 1858 dell'Accademia delle scienze di Berlino, il sig. KRONECKER presentava una Nota **) nella quale annunciava siccome proprietà di quella ridotta del settimo grado, che ciascuna radice di essa è una funzione razionale di altre tre. Il sig. NOETHER più tardi ***) ha dimostrato che queste ultime tre radici devono soddisfare ad una speciale condizione.

Il sig. KLEIN nei suoi lavori sulle equazioni modulari Jacobiane ha dato le espressioni delle radici della ridotta del settimo grado in funzione di tre quantità che indicheremo con c_1, c_2, c_3.

Posto $2\omega + 1 = \sqrt{-7}$ e $\rho = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, quelle espressioni sono:

$$x_s = u_s + \omega v_s,$$

*) HERMITE, *Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré* [Annali di Matematica pura ed applicata, s. I, t II (1859), pp. 59-61].

**) KRONECKER, *Notiz über Gleichungen des siebenten Grades* [Monatsberichte der k. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1858, pp. 287-289].

***) NOETHER, *Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 89-110].

essendo

$$u_s = \rho^s c_2^2 + \rho^{4s} c_3^2 + \rho^{2s} c_1^2,$$

$$v_s = \rho^{6s} c_2 c_3 + \rho^{3s} c_3 c_1 + \rho^{5s} c_1 c_2,$$

ed $s = 0, 1, 2, \ldots 6$.

Indicando con f la forma ternaria biquadratica

$$f = c_2^3 c_3 + c_3^3 c_1 + c_1^3 c_2,$$

e con α, β, γ, δ le espressioni:

$$\alpha = c_1 c_2 c_3, \qquad \beta = c_2^2 c_3^3 + c_3^2 c_1^3 + c_1^2 c_2^3,$$

$$\gamma = c_2 c_3^5 + c_3 c_1^5 + c_1 c_2^5, \qquad \delta = c_1^7 + c_2^7 + c_3^7;$$

inoltre:

$$h = 5\alpha^2 - \gamma,$$

$$k = \delta^2 - 10\alpha f \delta - 232\alpha\beta\gamma + 40 f \beta^2 - 1192\alpha^3\beta + 465\alpha^2 f^2,$$

le h, k sono covarianti del sesto e del quattordicesimo ordine della forma f; e la equazione del settimo grado di cui le radici sono le $x_0, x_1, \ldots x_6$ è la seguente *):

$$x^7 - 7\omega f x^5 + 7\omega h x^4 - 7(2\omega + 5) f^2 x^3 + 14(2\omega + 3) f h x^2$$

$$+ 7[(3\omega - 2) f^3 - (\omega + 3) h^2] x - (7\omega - 38) f^2 h - k = 0.$$

Mutando ρ in ρ^6 nel valore di x_s, si avrà:

$$z_s = u_s - (\omega + 1) v_s,$$

e la equazione del settimo grado che ha per radici le $z_0, z_1, \ldots z_6$ sarà la superiore nella quale si muti ω in $-(\omega + 1)$.

2. Sia ora

$$x^3 - a x^2 + b x - c = 0$$

la equazione del terzo grado di cui le radici sono le

$$x_{s+1}, \quad x_{s+4}, \quad x_{s+2};$$

*) Klein, *Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* [Mathematische Annalen, t. XV (1879), pp. 251-282]. — Brioschi, *Ueber die* Jacobi'*sche Modulargleichung vom achtem Grade* [Ib., t. XV (1879), pp. 241-250]. — Gordan, *Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von* 168 *Substitutionen* [Ib., t. XX (1882), pp. 515-530].

si avrà:

$$a = x_{s+1} + x_{s+4} + x_{s+2} = \omega z_s,$$

e quindi a soddisferà una equazione del settimo grado che si dedurrà tosto dalla superiore. Ma dai valori delle x_{s+1}, x_{s+4}, x_{s+2} si deducono facilmente le relazioni:

$$4b = (\omega + 3)a^2 - 4(3\omega - 2)f,$$

$$8c = (\omega + 3)a^3 - 4(5\omega - 1)af - 8(2\omega + 1)h,$$

cioè i coefficienti di quella equazione del terzo grado sono funzioni di a, f, h.

La stessa proprietà ha luogo pei coefficienti della equazione del quarto grado, la quale ha per radici le altre quattro radici della equazione superiore del settimo grado, cioè le x_s, x_{s+6}, x_{s+3}, x_{s+5}. Indicando con

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{1}$$

questa equazione, si trovano le

$$A = a, \qquad 4B = -(\omega + 1)a^2 - 8(2\omega + 1)f,$$

$$8C = -(3\omega + 1)a^3 - 28(\omega + 1)af + 8(5\omega - 1)h,$$

$$16D = -(3\omega + 1)a^4 - 8(3\omega + 5)a^2 f - 7 . 16f^2 + 16(3\omega - 2)ah.$$

Questi valori infatti soddisfano identicamente alle due condizioni:

$$-Da + Cb - Bc = 14(2\omega + 3)fh,$$

$$Db - Cc = 7[(3\omega - 2)f^3 - (\omega + 3)h^2],$$

e per la proprietà indicata sopra rispetto ad a si ha:

$$Dc = (7\omega - 38)f^2 h + k.$$

3. La equazione di 4° grado (1) si può trasformare in una molto più semplice, ponendo:

$$a = 4m, \qquad f = 3(3\omega - 2)p - m^2,$$

$$h = 2m^3 + 3(5\omega + 6)mp - 7(5\omega - 2)q,$$

$$x = \omega\sqrt{-7}\,v - m.$$

Si ottiene così la

$$v^4 + 6pv^2 - 8qv + 9p^2 + 4mq = 0, \tag{2}$$

ed indicando con g_2, g_3 i suoi invarianti, saranno:

$$g_2 = 4(3p^2 + mq); \qquad g_3 = 4(2p^3 + mpq - q^2),$$

dalle quali:

$$-4q^2 = 4p^3 - g_2 p + g_3, \qquad -4mq = 12p^2 - g_2.$$

Ora se si rappresentano con t_0, t_1, t_2 le radici della equazione cubica

$$4t^3 - g_2 t + g_3 = 0,$$

e si pongono

$$A_0^2 = t_0 - p, \qquad A_1^2 = t_1 - p, \qquad A_2^2 = t_2 - p,$$

si avranno le

$$q = A_0 A_1 A_2, \qquad -3p = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2,$$

e

(3) $$-mq = A_0^2 A_1^2 + A_1^2 A_2^2 + A_2^2 A_0^2.$$

Osservando ora che le m, A_0, A_1, A_2 sono le seguenti funzioni lineari delle quattro radici della equazione (1):

$$-4m = x_s + x_{s+6} + x_{s+3} + x_{s+5},$$

$$-4\omega\sqrt{-7}\,A_0 = x_s + x_{s+6} - x_{s+3} - x_{s+5},$$

$$-4\omega\sqrt{-7}\,A_1 = x_s + x_{s+3} - x_{s+5} - x_{s+6},$$

$$-4\omega\sqrt{-7}\,A_2 = x_s + x_{s+5} - x_{s+6} - x_{s+3},$$

si deduce che le m, p, q sono funzioni razionali, intiere, di quelle quattro radici, ed in conseguenza lo sono le f, h, k; che inoltre quelle radici sono legate da una relazione biquadratica, la (3).

Si ha così il teorema:

I coefficienti della ridotta del settimo grado, di cui le radici sono le x_0, x_1, ... x_6, hanno la proprietà di essere funzioni razionali, intiere, di quattro fra esse x_s, x_{s+6}, x_{s+3}, x_{s+5}; e queste quattro radici sono legate da una relazione biquadratica.

È noto che, se $f = 0$, si ha la ridotta della equazione modulare Jacobiana; in questo caso le quattro radici indicate soddisfano quindi anche ad una relazione quadratica.

4. Le formole, che abbiamo stabilite nei precedenti numeri 2 e 3, conducono ad altri risultati che valgono a meglio precisare la natura della ridotta della equazione modulare dell'ottavo grado.

Osserviamo dapprima che dai valori di b, c in funzione di a, f, h, dati nel n° 2,

si ottengono tosto le

$$4(3\omega-2)f=(\omega+3)a^2-4b,$$

$$32\sqrt{-7}\,b=(\omega-5)(a^2-4b)a-32c,$$

per le quali i valori dei coefficienti A, B, C, D dell'equazione (1) diventano:

$$A=a, \qquad 8B=(\omega-1)[(\omega+1)a^2-4b],$$

$$16C=(\omega+3)[(\omega-5)a^3-2(3\omega-4)ab-16c],$$

$$4^4D=(3\omega+1)[(19\omega+1)a^4-8(7\omega+1)a^2b-16b^2+16(5\omega-2)ac],$$

e da queste eliminando le a, b, c si ha la relazione biquadratica fra le radici della stessa equazione (1), ossia la

$$(\omega+7)A^4-4(\omega+8)A^2B+8(\omega+6)AC+16B^2-64D=0.$$

Si ha così il teorema:

Indicando con

$$\varphi(x)=x^3-ax^2+bx-c=0$$

la equazione che ha per radici le x_{s+1}, x_{s+4}, x_{s+2} *(radici della ridotta della equazione modulare dell'ottavo grado), la equazione del quarto grado*

$$\psi(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

di cui le radici sono le altre quattro della ridotta stessa, ha la proprietà che i suoi coefficienti A, B, C, D *sono funzioni razionali, intiere di* a, b, c, *ossia delle prime tre indicate radici.*

5. I valori delle quantità m, p, q introdotte nel n° 3, espressi in funzione dei coefficienti della equazione $\psi(x)=0$, o della $\varphi(x)=0$, sono i seguenti:

$$4m=A, \qquad 3\cdot7\cdot4^3p=(\omega-1)(3A^2-8B),$$

$$2\cdot7\cdot4^4q=-(5\omega-1)(A^3-4AB+8C),$$

oppure:

$$4m=a, \qquad 3\cdot7\cdot4^2p=(\omega-2)a^2-(3\omega+1)b,$$

$$7^2\cdot4^3q=(3\omega-2)a^3-2(5\omega-1)ab+(9\omega-13)c.$$

Posto nella $\psi(x)$

$$x=\omega\sqrt{-7}\,v-m, \tag{4}$$

si ha:

$$\psi(x) = 7^2(3\omega + 2)M(v),$$

essendo

$$M(v) = v^4 + 6pv^2 - 8qv + 9p^2 + 4mq,$$

come si è già trovato.

Così, ponendo nella $\varphi(x)$

$$x = (3\omega - 2)\xi - (\omega - 2)m,$$

si ottiene la

$$\varphi(x) = 7(9\omega + 22)L(\xi),$$

nella quale:

$$L(\xi) = \xi^3 - m\xi^2 - 3p\xi + q.$$

Notiamo dapprima che, indicando con $N(v)$ l'hessiano di $M(v)$, si ha la relazione:

$$pM(\xi) - N(\xi) = 4qL(\xi),$$

si ha cioè il teorema: *Le radici della ridotta del settimo grado sono le radici delle due equazioni:*

$$M(v) = 0, \qquad pM(\xi) - N(\xi) = 0,$$

nella ipotesi che fra le x, v sussista la relazione (4) e sia

$$4\xi = 2(\omega + 1)v + (\omega + 3)m.$$

In secondo luogo siano $T(v)$ il covariante di sesto ordine di $M(v)$ e g_2, g_3 i suoi invarianti, si avrà:

$$4N^3(\xi) - g_2 N(\xi) M^2(\xi) + g_3 M^3(\xi) = - T^2(\xi);$$

ma per ciascuna delle radici della equazione $L(\xi) = 0$ si ha:

$$p = \frac{N(\xi)}{M(\xi)},$$

e quindi:

$$4p^3 - g_2 p + g_3 = - \frac{T^2(\xi)}{M^3(\xi)},$$

da cui, per una formola del n° 3:

$$q^2 = \frac{1}{4}\frac{T^2(\xi)}{M^3(\xi)}.$$

Infine dai valori di g_2, g_3 dati pure al n° 3, si ottiene pel discriminante di $M(v)$:

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 4^2 q^2 (9m^2p^2 + 4m^3q + 108p^3 + 54mpq - 27q^2),$$

od indicando con δ il discriminante di $L(\xi)$:

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 3^3 \cdot 4^2 q^2 \delta .$$

Posto ora

$$X = \frac{1}{2\sqrt{-3}}(3\sqrt{-3}\, g_3 + \sqrt{g_2^3 - 27 g_3^2})^{\frac{1}{3}},$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{-3}}(3\sqrt{-3}\, g_3 - \sqrt{g_2^3 - 27 g_3^2})^{\frac{1}{3}},$$

si hanno, come è noto, le

$$t_0 = X + Y, \qquad t_1 = \varepsilon X + \varepsilon^2 Y, \qquad t_2 = \varepsilon^2 X + \varepsilon Y,$$

essendo $2\varepsilon + 1 = \sqrt{-3}$; ma sostituendo nei valori di X, Y alle m, p, q, $\sqrt{\delta}$ i rispettivi valori formati colle radici della equazione $L(\xi) = 0$, si trovano le

$$X = \tfrac{1}{3}(\xi_{s+4}\xi_{s+1} + \varepsilon \xi_{s+1}\xi_{s+2} + \varepsilon^2 \xi_{s+2}\xi_{s+4}),$$

$$Y = \tfrac{1}{3}(\xi_{s+4}\xi_{s+1} + \varepsilon^2 \xi_{s+1}\xi_{s+2} + \varepsilon \xi_{s+2}\xi_{s+4}).$$

Deducendo da questi valori quelli di t_0, t_1, t_2 si giunge alle importanti relazioni:

$$A_0^2 = \xi_{s+4}\xi_{s+1}, \qquad A_1^2 = \xi_{s+2}\xi_{s+4}, \qquad A_2^2 = \xi_{s+1}\xi_{s+2}.$$

A questo risultato si può arrivare anche più facilmente, osservando che, per relazioni stabilite nel n° 3, la equazione che ha per radici A_0^2, A_1^2, A_2^2, è la

$$y^3 + 3py^2 - mqy - q^2 = 0;$$

ora questa si ottiene dalla $L(\xi) = 0$ ponendo $\xi = -\dfrac{q}{y}$, e quindi si hanno per A_0^2, A_1^2, A_2^2 i valori superiori.

La proprietà caratteristica della ridotta fin qui considerata trova in conclusione la propria espressione nel teorema:

Le radici x_s, x_{s+6}, x_{s+3}, x_{s+5} della ridotta della equazione modulare dell'ottavo grado sono esprimibili in funzione delle altre x_{s+1}, x_{s+4}, x_{s+2} per mezzo delle seguenti formole. Indicando con a la somma di queste ultime radici e con b la somma dei loro prodotti a due a due, si hanno le

$$x_s + x_{s+6} + x_{s+3} + x_{s+5} = -a,$$

$$x_s + x_{s+3} - x_{s+5} - x_{s+6} = -p_{s+1},$$

$$x_s + x_{s+5} - x_{s+6} - x_{s+3} = -p_{s+4},$$

$$x_s + x_{s+6} - x_{s+3} - x_{s+5} = -p_{s+2},$$

essendo

$$p_{s+1} = [4(\omega - 1)x_{s+1}^2 + 4a x_{s+1} + 4(\omega - 1)b - (\omega - 2)a^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$p_{s+4} = [4(\omega - 1)x_{s+4}^2 + 4a x_{s+4} + 4(\omega - 1)b - (\omega - 2)a^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$p_{s+2} = [4(\omega - 1)x_{s+2}^2 + 4a x_{s+2} + 4(\omega - 1)b - (\omega - 2)a^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Le equazioni del settimo grado, le radici delle quali soddisfano alle condizioni superiori, sono quindi risolvibili per funzioni ellittiche.

21 giugno e 19 luglio 1885.

[G.].

CXLIII.

LE EQUAZIONI MODULARI NELLA TRASFORMAZIONE DEL TERZO ORDINE DELLE FUNZIONI IPERELLITTICHE A DUE VARIABILI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume I (1884-85), pp. 769-771.

La teorica della trasformazione delle funzioni iperellittiche a due variabili non è molto progredita dopo che fino dall'anno 1855 il sig. HERMITE ne stabiliva le basi nella sua nota Memoria *Sur la théorie de la transformation des fonctions abeliennes* *). Mi limiterò a citare fra i lavori posteriori quello del sig. KÖNIGSBERGER *Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der* ABEL'*schen Functionen erster Ordnung* **) ed i più recenti del sig. KRAUSE in parte riassunti nella Memoria *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques de premier ordre* ***).

Le ricerche del sig. KRAUSE conducono, anche nel caso qui considerato della trasformazione di terzo ordine, ad un grande numero di relazioni, alcune delle quali dovranno necessariamente essere conseguenza di altre, essendo limitato il numero delle incognite del problema.

Sieno $\vartheta(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{02}(v_1, v_2)$, quattro funzioni theta, le prime due pari, dispari le seconde; indicando con $\theta(u_1, u_2)$, $\theta_{34}(u_1, u_2)$ e così via

*) [Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XL (1855), pp. 249-254, 304-309, 365-369, 427-431, 485-489, 536-541, 704-707, 784-787].

**) [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXVII (1867), pp. 97-113].

***) [Acta Mathematica, t. III (1883-84), pp. 153-180].

le funzioni trasformate, si avrà come trovarono gli autori citati:

$$\theta = \rho[\vartheta^3 + \vartheta(\lambda \vartheta_{34}^2 + \mu \vartheta_1^2 + \nu \vartheta_{02}^2) + \omega \vartheta_{34} \vartheta_1 \vartheta_{01}],$$

nella quale le ρ, λ, μ, ν, ω sono i cinque coefficienti indeterminati.

Rappresenterò con t, u i valori di $\vartheta(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$ corrispondenti a $v_1 = v_2 = 0$; e così con x, y; z, w quelli delle funzioni ϑ_4, ϑ_{14}; ϑ_{03}, ϑ_{23}, e colle stesse lettere maiuscole i corrispondenti valori delle funzioni trasformate. Si hanno fra queste quantità le seguenti relazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \rho x(x^2 - \lambda y^2), & Y = \rho y\,(y^2 + \lambda x^2), \\ Z = \rho z\,(z^2 + \mu w^2), & W = \rho w(w^2 - \mu z^2), \\ T = \rho t\,(t^2 + \nu u^2), & U = \rho u\,(u^2 + \nu t^2). \end{cases}$$

Inoltre dalle relazioni generali

$$t^4 - u^4 = z^4 + w^4 = x^4 + y^4,$$

si deducono le due note:

$$x X + y Y + u U = t T,$$

$$z Z + w W + u U = t T.$$

Formo ora coi valori superiori di X, Y, Z, W, T, U le tre espressioni eguali fra loro:

$$X^4 + Y^4 = Z^4 + W^4 = T^4 - U^4;$$

si ottengono le

$$\frac{X^4 + Y^4 - \rho^4(x^4 + y^4)^3}{\rho^4 x^4 y^4 (x^4 + y^4)} = \lambda^4 + 6\lambda^2 - 4\lambda \frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2} - 3,$$

$$\frac{Z^4 + W^4 - \rho^4(z^4 + w^4)^3}{\rho^4 z^4 w^4 (z^4 + w^4)} = \mu^4 + 6\mu^2 + 4\mu \frac{z^4 - w^4}{z^2 w^2} - 3,$$

$$\frac{T^4 - U^4 - \rho^4(t^4 - u^4)^3}{\rho^4 t^4 u^4 (t^4 - u^4)} = -\left(\nu^4 + 6\nu^2 - 4\nu \frac{t^4 + u^4}{t^2 u^2} - 3\right).$$

I numeratori delle frazioni primi membri delle precedenti equazioni sono evidentemente eguali fra loro; ora si può dimostrare che ciascuno di essi è eguale a zero. Dalle equazioni (1) vedesi tosto essere

$$\rho = \frac{x X + y Y}{x^4 + y^4} = \frac{z Z + w W}{z^4 + w^4} = \frac{t T - u U}{t^4 - u^4},$$

ed indicando con ρ_1 il valore di ρ per la trasformazione supplementare, si avrà:

$$\rho_1 = \frac{xX + yY}{X^4 + Y^4} = \frac{zZ + wW}{Z^4 + W^4} = \frac{tT - uU}{T^4 - U^4};$$

per le prime delle quali:

$$X^4 + Y^4 - \rho^4(x^4 + y^4)^3 = \frac{\rho}{\rho_1}(x^4 + y^4)[1 - \rho^3\rho_1(x^4 + y^4)^2];$$

e siccome la formola per la triplicazione dà

$$\rho^3\rho_1 = \frac{1}{(x^4 + y^4)^2},$$

si giunge al seguente teorema:

I coefficienti λ, μ, ν della formola di trasformazione del terzo ordine devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 - 4a\lambda - 3 = 0,$$

$$\mu^4 + 6\mu^2 - 4b\mu - 3 = 0,$$

$$\nu^4 + 6\nu^2 - 4c\nu - 3 = 0,$$

essendo

$$a = \frac{x^4 - y^4}{x^2y^2}, \qquad b = \frac{w^4 - z^4}{z^2w^2}, \qquad c = \frac{t^4 + u^4}{t^2u^2}.$$

Se si indicano con λ_1, μ_1, ν_1 i valori di λ, μ, ν per la trasformazione supplementare, si avranno, analogamente alle (1):

$$x = \rho_1 X(X^2 - \lambda_1 Y^2), \qquad y = \rho_1 Y(Y^2 + \lambda_1 X^2),$$

$$z = \rho_1 Z(Z^2 + \mu_1 W^2), \qquad w = \rho_1 W(W^2 - \mu_1 Z^2),$$

$$t = \rho_1 T(T^2 + \nu_1 U^2), \qquad u = \rho_1 U(U^2 + \nu_1 T^2),$$

dalle quali e dalle (1) si deducono la

$$\lambda\lambda_1 + 3 = \frac{(xX + yY)^4 - (x^4 + y^4)(X^4 + Y^4)}{xyXY(xX + yY)^2},$$

ed altre due analoghe; ma i numeratori di queste funzioni sono nulli per quanto si è osservato più addietro; si avranno quindi le tre relazioni:

$$\lambda\lambda_1 + 3 = 0, \qquad \mu\mu_1 + 3 = 0, \qquad \nu\nu_1 + 3 = 0.$$

Infine indicando con c_0, c_{01}, c_2, c_{12} i valori delle altre quattro funzioni pari $\vartheta_0(v_1, v_2)$, $\vartheta_{01}(v_1, v_2)$, $\vartheta_2(v_1, v_2)$, $\vartheta_{12}(v_1, v_2)$ corrispondenti a $v_1 = v_2 = 0$, si hanno, come ha dimostrato il sig. KRAUSE:

$$C_0 c_0 = \rho(c_0^4 + \lambda c_0^2 c_{01}^2 + \mu c_0^2 c_2^2 + \nu c_0^2 c_{12}^2 + \omega c_0 c_{01} c_2 c_{12}),$$

ed altre tre analoghe, per le quali:

$$C_0 c_0 + C_2 c_2 = Tt - Xx, \qquad C_0 c_0 + C_{01} c_{01} = Tt - Zz,$$

$$C_{01} c_{01} + C_{12} c_{12} = Tt - Yy, \qquad C_2 c_2 + C_{12} c_{12} = Tt - Ww;$$

si otterrà dalle medesime la equazione del quarto grado a cui soddisfa ω.

A questo scopo si osservi che fra le x, y, z, w, t, u e le c_0, c_{01}, c_2, c_{12} hanno luogo le relazioni:

$$c_0^2 = \frac{y^2 w^2 t^2 + x^2 z^2 u^2}{z^4 + w^4}, \qquad c_{01}^2 = \frac{x^2 w^2 t^2 - y^2 z^2 u^2}{z^4 + w^4},$$

$$c_2^2 = \frac{x^2 w^2 u^2 - y^2 z^2 t^2}{z^4 + w^4}, \qquad c_{12}^2 = \frac{y^2 w^2 u^2 + x^2 z^2 t^2}{z^4 + w^4},$$

e quindi si può formare il valore di ω in funzione delle x, y, ...; X, Y, ...

15 novembre 1885.

[Pa.], [G.].

CXLIV.

I NUOVI MODULI PER LE FUNZIONI IPERELLITTICHE A DUE VARIABILI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie IV, volume II (1885-86), 1° sem., pp. 159-164.

1. Consideriamo quattro funzioni theta legate fra loro da una equazione di GÖPEL, per esempio le

$$\vartheta(v_1, v_2), \quad \vartheta_0(v_1, v_2), \quad \vartheta_{12}(v_1, v_2), \quad \vartheta_{34}(v_1, v_2).$$

Posto $y = \frac{\vartheta_0}{\vartheta}$, $z = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}$, $w = \frac{\vartheta_{34}}{\vartheta}$, quella equazione sia la seguente:

$$0 = 1 + y^4 + z^4 + w^4 + 2a(y^2 + z^2 w^2) + 2b(z^2 + w^2 y^2) + 2c(w^2 + y^2 z^2) + 4kyzw,$$

nella quale, come è noto:

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1.$$

Denomineremo le quantità

$$\lambda = a + \sqrt{a^2 - 1}, \qquad \mu = b + \sqrt{b^2 - 1}, \qquad \nu = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

i *nuovi moduli* per le funzioni iperellittiche a due variabili. A ciò siamo indotti dal fatto che i quadrati delle altre dodici funzioni theta sono esprimibili in funzione lineare dei quadrati delle quattro superiori e delle costanti λ, μ, ν.

Indicando con A, B, C le espressioni

$$A = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}, \quad B = (\lambda^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C = (\lambda^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}},$$

si hanno pei quadrati di quelle dodici funzioni le seguenti:

$$
(1)\left\{\begin{array}{ll}
C\dfrac{\vartheta_1^2}{\vartheta^2}=\lambda\mu+\mu y^2+\lambda z^2+w^2, & -C\dfrac{\vartheta_2^2}{\vartheta^2}=\lambda+y^2+\lambda\mu z^2+\mu w^2,\\
B\dfrac{\vartheta_3^2}{\vartheta^2}=1+\lambda y^2+\lambda\nu z^2+\nu w^2, & B\dfrac{\vartheta_4^2}{\vartheta^2}=\nu+\lambda\nu y^2+\lambda z^2+w^2,\\
A\dfrac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta^2}=\mu\nu+y^2+\nu z^2+\mu w^2, & A\dfrac{\vartheta_{14}^2}{\vartheta^2}=1+\mu\nu y^2+\mu z^2+\nu w^2,\\
B\dfrac{\vartheta_{03}^2}{\vartheta^2}=\lambda+y^2+\nu z^2+\lambda\nu w^2, & -C\dfrac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta^2}=\mu+\lambda\mu y^2+z^2+\lambda w^2,\\
A\dfrac{\vartheta_{24}^2}{\vartheta^2}=\mu+\nu y^2+z^2+\mu\nu w^2, & -A\dfrac{\vartheta_{13}^2}{\vartheta^2}=\nu+\mu y^2+\mu\nu z^2+w^2,\\
C\dfrac{\vartheta_{02}^2}{\vartheta^2}=1+\lambda y^2+\mu z^2+\lambda\mu w^2, & -B\dfrac{\vartheta_{04}^2}{\vartheta^2}=\lambda\nu+\nu y^2+z^2+\lambda w^2.
\end{array}\right.
$$

Ponendo in queste relazioni $v_1 = v_2 = 0$ e rappresentando con c, c_0, c_{12}, ... i corrispondenti valori di $\vartheta(v_1, v_2)$, $\vartheta_0(v_1, v_2)$, ..., si ottengono dalle superiori le relazioni:

$$
\frac{c_0^2}{c^2}=\frac{\lambda\mu\nu-1}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_{12}^2}{c^2}=\frac{\nu-\lambda\mu}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_{34}^2}{c^2}=\frac{\mu-\lambda\nu}{\lambda-\mu\nu},
$$

$$
\frac{c_{23}^2}{c^2}=-\frac{A}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_{03}^2}{c^2}=\frac{B}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_2^2}{c^2}=-\frac{C}{\lambda-\mu\nu},
$$

$$
\frac{c_{14}^2}{c^2}=\frac{A\lambda}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_4^2}{c^2}=-\frac{B\mu}{\lambda-\mu\nu},\qquad \frac{c_{01}^2}{c^2}=\frac{C\nu}{\lambda-\mu\nu},
$$

nell'uso delle quali importa osservare che

$$
BC=A(\lambda^2-1),\qquad CA=B(1-\mu^2),\qquad AB=C(1-\nu^2).
$$

I nuovi moduli λ, μ, ν sono quindi:

$$
(2)\qquad \lambda=-\frac{c_{14}^2}{c_{23}^2},\qquad \mu=-\frac{c_4^2}{c_{03}^2},\qquad \nu=-\frac{c_{01}^2}{c_2^2},
$$

che dànno per a, b, c i noti valori:

$$
2a=-\frac{c_{14}^4+c_{23}^4}{c_{14}^2c_{23}^2},\qquad 2b=-\frac{c_4^4+c_{03}^4}{c_4^2c_{03}^2},\qquad 2c=-\frac{c_{01}^4+c_2^4}{c_{01}^2c_2^2}.
$$

2. Stabilita così la definizione dei nuovi moduli facciamo seguire una prima applicazione nella ricerca delle equazioni differenziali parziali che devono essere soddisfatte dal numeratore e dal denominatore delle formole per la trasformazione o per la moltiplicazione.

Il sig. KRAUSE, nel suo lavoro *Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen* *), ha dato la forma di quelle equazioni differenziali affatto corrispondente a quella della analoga per le funzioni ellittiche; ma, come l'autore stesso osserva, questo risultato teorico doveva rimanere senza applicazione per le varie incognite che conteneva ancora il problema, e per la complicazione del risultato. La introduzione dei nuovi moduli λ, μ, ν risolve queste difficoltà.

Considereremo le tre funzioni iperellittiche y, z, w siccome funzioni degli argomenti u_1, u_2 legati ai v_1, v_2 dalle note relazioni lineari; e porremo:

$$y_1 = \frac{\partial y}{\partial u_1}, \qquad y_2 = \frac{\partial y}{\partial u_2}, \qquad y_{11} = \frac{\partial^2 y}{\partial u_1^2}, \qquad y_{12} = \frac{\partial^2 y}{\partial u_1 \partial u_2}, \qquad y_{22} = \frac{\partial^2 y}{\partial u_2^2},$$

e così per z e per w.

Inoltre scriveremo:

$$(\alpha_2 y_1^2) = \alpha_2 y_1^2 - \alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_0 y_2^2,$$

$$(\alpha_2 z_1 w_1) = \alpha_2 z_1 w_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 (z_1 w_2 + z_2 w_1) + \alpha_0 z_2 w_2,$$

$$(\alpha_2 y_{11}) = \alpha_2 y_{11} - \alpha_1 y_{12} + \alpha_0 y_{22},$$

ed analogamente per altre, essendo i coefficienti α_0, α_1, α_2, ... funzioni dei nuovi moduli.

Ciò posto, le tre equazioni differenziali sopra indicate sono le seguenti:

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum (\alpha_2 y_1^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\sum (\alpha_2 z_1 w_1) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial w} + (1-n) \sum (\alpha_2 y_{11}) \frac{\partial V}{\partial y} \\ &\qquad + 2nk(\lambda^2 - 1)\frac{\partial V}{\partial \lambda} - n(1-n)k(y^2 + L)V = 0, \\ &\sum (\beta_2 y_1^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\sum (\beta_2 z_1 w_1) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial w} + (1-n) \sum (\beta_2 y_{11}) \frac{\partial V}{\partial y} \\ &\qquad + 2nk(\mu^2 - 1)\frac{\partial V}{\partial \mu} - n(1-n)k(z^2 + M)V = 0, \\ &\sum (\gamma_2 y_1^2) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\sum (\gamma_2 z_1 w_1) \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial w} + (1-n) \sum (\gamma_2 y_{11}) \frac{\partial V}{\partial y} \\ &\qquad + 2nk(\nu^2 - 1)\frac{\partial V}{\partial \nu} - n(1-n)k(w^2 + N)V = 0, \end{aligned} \right.$$

---

*) [Mathematische Annalen, t. XXVI (1886), pp. 1-15, 16-25].

nelle quali V è il numeratore od il denominatore delle formole di trasformazione o di moltiplicazione, n l'ordine della trasformazione, a cui deve sostituirsi n^2 pel caso della moltiplicazione, e le L, M, N hanno i valori:

$$(n-1)L = \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}, \qquad (n-1)M = \frac{\mu - \lambda\nu}{\lambda\mu\nu - 1}, \qquad (n-1)N = \frac{\nu - \lambda\mu}{\lambda\mu\nu - 1};$$

in fine:

$$\sum (\alpha_2 y_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (\alpha_2 y_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\alpha_2 z_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + (\alpha_2 w_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2},$$

e così per gli altri segni di sommatorie.

I valori delle espressioni $(\alpha_2 y_1^2), \ldots$ furono, in parte, da me pubblicati recentemente *), ma raccolgo qui di nuovo i valori stessi e gli altri per l'applicazione loro nelle formole superiori. Premetto che per brevità furono introdotte le seguenti denominazioni:

$$(4)\ \begin{cases} P = y^2 + z^2 w^2, & Q = z^2 + w^2 y^2, & R = w^2 + y^2 z^2, \\ P_0 = y^4 + 2ay^2 + 1, & Q_0 = z^4 + 2bz^2 + 1, & R_0 = w^4 + 2cw^2 + 1, \end{cases}$$

ed:

$$\alpha = a - bc, \qquad \beta = b - ca, \qquad \gamma = c - ab,$$

$$\alpha_0 = a^2 - 1, \qquad \beta_0 = b^2 - 1, \qquad \gamma_0 = c^2 - 1.$$

Ciò posto, si hanno le

$$(5)\ \begin{cases} (\alpha_2 y_1^2) = kP_0 + 2\alpha_0 yzw, & (\alpha_2 z_1^2) = kR + 2\gamma yzw, & (\alpha_2 w_1^2) = kQ + 2\beta yzw, \\ (\beta_2 y_1^2) = (\alpha_2 z_1^2), & (\beta_2 z_1^2) = kQ_0 + 2\beta_0 yzw, & (\beta_2 w_1^2) = kP + 2\alpha yzw, \\ (\gamma_2 y_1^2) = (\alpha_2 w_1^2), & (\gamma_2 z_1^2) = (\beta_2 w_1^2), & (\gamma_2 w_1^2) = kR_0 + 2\gamma_0 yzw, \end{cases}$$

poi:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_2 y_{11}) = ky(y^2+a) + \alpha_0 zw, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2 z_{11}) = kzy^2 + \gamma wy, \quad \tfrac{1}{2}(\alpha_2 w_{11}) = kwy^2 + \beta yz,$$

$$(\beta_2 y_{11}) = \frac{z}{y}(\alpha_2 z_{11}), \qquad \tfrac{1}{2}(\beta_2 z_{11}) = kz(z^2+b) + \beta_0 wy, \quad \tfrac{1}{2}(\beta_2 w_{11}) = kwz^2 + \alpha yz,$$

$$(\gamma_2 y_{11}) = \frac{w}{y}(\alpha_2 w_{11}), \qquad (\gamma_2 z_{11}) = \frac{w}{z}(\beta_2 w_{11}), \qquad \tfrac{1}{2}(\gamma_2 w_{11}) = kw(w^2+c) + \gamma_0 yz,$$

*) *Sur quelques formules hyperelliptiques* [Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CII (1886), pp. 239-242, 297-298].

e da ultimo le nove seguenti:

$$(\alpha_2 z_1 w_1) = k(y^2 - a) z w + y(\beta z^2 + \gamma w^2 - \alpha_0),$$
$$(\alpha_2 w_1 y_1) = k(y^2 + a) w y + z(\alpha_0 w^2 + \beta y^2 - \gamma),$$
$$(\alpha_2 y_1 z_1) = k(y^2 + a) y z + w(\gamma y^2 + \alpha_0 z^2 - \beta),$$
$$(\beta_2 z_1 w_1) = k(z^2 + b) z w + y(\alpha z^2 + \beta_0 w^2 - \gamma),$$
$$(\beta_2 w_1 y_1) = k(z^2 - b) w y + z(\gamma w^2 + \alpha y^2 - \beta_0),$$
$$(\beta_2 y_1 z_1) = k(z^2 + b) y z + w(\beta_0 y^2 + \gamma z^2 - \alpha),$$
$$(\gamma_2 z_1 w_1) = k(w^2 + c) z w + y(\gamma_0 z^2 + \alpha w^2 - \beta),$$
$$(\gamma_2 w_1 y_1) = k(w^2 + c) w y + z(\beta w^2 + \gamma_0 y^2 - \alpha),$$
$$(\gamma_2 y_1 z_1) = k(w^2 - c) y z + w(\alpha y^2 + \beta z^2 - \gamma_0).$$

Sostituendo queste espressioni nelle tre equazioni differenziali, si ha quanto è necessario per l'uso di esse. Vedesi intanto che sia i coefficienti delle formole di trasformazione, sia quelli delle formole di moltiplicazione, sono funzioni dei tre nuovi moduli λ, μ, ν.

3. Passiamo ad alcune applicazioni di queste formole. Dalle equazioni differenziali (3) deducesi facilmente per la *duplicazione* dover essere

$$V = g_1 P + g_2 Q + g_3 R + 2 g_4 y z w,$$

nella quale le P, Q, R hanno i valori (4).

I coefficienti g_1, g_2, g_3, g_4 devono soddisfare alle seguenti equazioni differenziali:

$$2(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1} g_1 - 3 a g_1 \qquad - \frac{g_4}{k}\alpha_0 = 0,$$

$$2(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1} g_2 - b g_1 + g_3 - \frac{g_4}{k}\gamma = 0,$$

$$2(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_3}{\partial \lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1} g_3 - c g_1 + g_2 - \frac{g_4}{k}\beta = 0,$$

$$(\lambda^2 - 1) k \frac{\partial g_4}{\partial \lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1} k g_4 - k^2 g_1 - a k g_4 - 2(\alpha_0 g_1 + \gamma g_2 + \beta g_3) = 0,$$

ed alle altre otto che da queste deduconsi colle permutazioni delle λ, μ, ν.

Dalla prima delle superiori, osservando essere identicamente

$$\frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1} = -a + \frac{\lambda\mu\nu + 1}{\lambda\mu\nu - 1}\sqrt{\alpha_0},$$

si ha tosto che essa è soddisfatta ponendo:

$$g_1 = \sqrt{\alpha_0} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}, \qquad g_4 = k\frac{\lambda\mu\nu + 1}{\lambda\mu\nu - 1},$$

ed analogamente lo saranno le due da essa dedotte col porre:

$$g_2 = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}, \qquad g_3 = \frac{\nu^2 - 1}{2\nu},$$

i quali valori soddisfano a tutte le equazioni.

Nella trasformazione del terzo ordine essendo

$$V = g_0 + g_1 y^2 + g_2 z^2 + g_3 w^2 + g_4 yzw,$$

si ottengono tre equazioni a derivate parziali per ciascuno dei cinque coefficienti, e quindi in tutto quindici equazioni differenziali.

Si hanno dapprima le tre:

$$3(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_0}{\partial\lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}g_0 + g_1 = 0,$$

$$3(\mu^2 - 1)\frac{\partial g_0}{\partial\mu} + \frac{\mu - \nu\lambda}{\lambda\mu\nu - 1}g_0 + g_2 = 0,$$

$$3(\nu^2 - 1)\frac{\partial g_0}{\partial\nu} + \frac{\nu - \lambda\mu}{\lambda\mu\nu - 1}g_0 + g_3 = 0,$$

dalle quali si possono dedurre i valori di g_1, g_2, g_3 in funzione di g_0 e delle sue derivate.

Si ottengono in seguito le equazioni:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &3(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_1}{\partial\lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}g_1 + 3g_0 - 2ag_1 = \alpha_0\frac{g_4}{k}, \\ &3(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_2}{\partial\lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}g_2 + g_3 \qquad\qquad = \gamma\frac{g_4}{k}, \\ &3(\lambda^2 - 1)\frac{\partial g_3}{\partial\lambda} + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}g_3 + g_2 \qquad\qquad = \beta\frac{g_4}{k}, \end{aligned}\right.$$

dalle quali, osservando essere

$$b\alpha_0 + \beta + a\gamma = 0, \qquad c\alpha_0 + a\beta + \gamma = 0, \qquad \alpha_0 + b\beta + c\gamma = k^2,$$

si deducono le

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3(\lambda^2 - 1)\left(b\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + a\frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_3}{\partial \lambda}\right) + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}(bg_1 + ag_2 + g_3) \\ & \qquad + 3bg_0 - 2abg_1 + ag_3 + g_2 = 0, \\ & 3(\lambda^2 - 1)\left(c\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + a\frac{\partial g_3}{\partial \lambda}\right) + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}(cg_1 + g_2 + ag_3) \\ & \qquad + 3cg_0 - 2acg_1 + g_3 + ag_2 = 0, \\ & 3(\lambda^2 - 1)\left(\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + c\frac{\partial g_2}{\partial \lambda} + b\frac{\partial g_3}{\partial \lambda}\right) + \frac{\lambda - \mu\nu}{\lambda\mu\nu - 1}(g_1 + cg_2 + bg_3) \\ & \qquad + 3g_0 - 2ag_1 + cg_3 + bg_2 = kg_4. \end{aligned} \right.$$

Analogamente alle (6) si otterranno per la seconda equazione differenziale le seguenti:

$$3(\mu^2 - 1)\frac{\partial g_1}{\partial \mu} + \frac{\mu - \nu\lambda}{\lambda\mu\nu - 1}g_1 + g_3 \qquad\qquad = \gamma\frac{g_4}{k},$$

$$3(\mu^2 - 1)\frac{\partial g_2}{\partial \mu} + \frac{\mu - \nu\lambda}{\lambda\mu\nu - 1}g_2 + 3g_0 - 2bg_2 = \beta_0\frac{g_4}{k},$$

$$3(\mu^2 - 1)\frac{\partial g_3}{\partial \mu} + \frac{\mu - \nu\lambda}{\lambda\mu\nu - 1}g_3 + g_1 \qquad\qquad = \alpha\frac{g_4}{k};$$

e siccome

$$b\gamma + a\beta_0 + \alpha = 0, \qquad \gamma + c\beta_0 + b\alpha = 0, \qquad c\gamma + \beta_0 + a\alpha = k^2,$$

se ne dedurranno altre tre simili alle (7). Così per le derivate rispetto a ν. Sostituendo in queste nove equazioni differenziali per g_1, g_2, g_3 i valori trovati più sopra, si avranno per g_0 sei equazioni differenziali parziali del secondo ordine, e la stessa proprietà avrà evidentemente luogo per g_1, g_2, g_3, g_4. Rimandiamo ad altro lavoro lo studio di queste equazioni.

7 marzo 1886.

[Pa.], [G.].

INDICE ALFABETICO

DEI NOMI RICORDATI IN QUESTO VOLUME.

Il numero indica la pagina e l'esponente quante volte il nome è ripetuto nella stessa pagina.

ABEL, 121, 134^2, 143^3, 145, 200, 254, 311, 397, 421.
ALEMBERT (d'), 120^4, 121^2, 123.
AMICI, 134^3.
ARONHOLD, 1, 4, 13, 18, 169^2, 399.

BASSI, 214.
BAUMGARTEN, 211.
BAZIN, 211.
BELLAVITIS, 125^2, 128, 131, 133.
BERTRAND, 85, 109, 148^4, 149, 150^3, 153^7, 154^5, 155^2.
BESSEL, 340.
BETTI, 41^4, 42^3, 183^2.
BIANCHI (Gius.), 319, 331.
BIDONE, 208, 211.
BOILEAU, 211.
BORDONI, 128, 163^2, 206, 207^2, 319, 331, 332^3, 333.
BOYDEN, 213.
BRIGHENTI, 125, 134^3, 135^2.
BRILL, 342.
BRIOSCHI, 119, 162, 170^4, 180, 197^2, 264, 275, 305, 342, 357, 375, 397, 414.
BRISSON, 130.
BRUNACCI, 213.
BRUNS, 363.
BRUSCHETTI, 125^2, 134.

CALVI G. ed A., 207.
CASORATI, 31^3.
CASTEL, 208.
CAUCHY, 121.
CAVALLI, 189^2, 192^2, 193, 194^2, 195^3.
CAVOUR, 215.
CAYLEY, 1, 137^3, 141, 169, 230, 397.
CHEVALIER, 41.
CLAPEYRON, 207^2.
CLEBSCH, 1, 249^2, 253, 339^2, 340^2, 342^2, 343^3, 353^2, 371.
COCOLI, 122^2, 123.
COLOMBANI, 205^4, 206^6, 207^6, 208^3, 209^2, 211^4, 212^6, 213^5, 214^2, 215^2.
CORIOLIS, 206, 213.
CRELLE, 143, 162, 199^2.
CREMONA, 339, 342.

DARBOUX, 85^2.
DARCY, 210, 211.
D'AUBUISSON, 102.
DELAUNAY, 109.
DE REGI, 208.
DE STEFANI, 207.
DUBUAT, 211^2.
DUPUIT, 209, 210^3, 211.

EDLUND, 128.
EULERO, 107, 120^2, 121, 124^3, 125, 130, 190.
EYTELWEIN, 126, 211^2.

FAIRBAIRN, 191, 192.
FARINI, 207.
FOURIER, 99^4, 108, 127.
FOURNET, 102.

Franchi, 189.
Francis, 211, 212[2], 213.
Fresnel, 190.
Fricke, 46, 47.
Fuchs, 265[2], 266, 271[2], 272[2].

Galileo, 191[2].
Galois, 41.
Gauss, 167, 264, 265[2], 321[2], 372.
Genocchi, 41.
Gierster, 51[2].
Girard, 191.
Giulio, 126[2], 127, 128, 130, 131[2], 134.
Göpel, 396, 397[2], 408[2], 425.
Gordan, 1, 3, 23, 29[2], 30, 31[2], 93[3], 94, 97, 249, 290[2], 293[2], 294[2], 340, 414.
Grandi, 191.
Greenhill, 79.

Halphen, 65, 66, 70, 77, 81[2], 83[2], 301, 303, 308, 311.
Hamilton, 171, 319[2], 320, 322, 332, 338[2].
Harbordt, 340.
Hawtorn, 214.
Hermite, 1, 22[2], 25, 31[2], 32[2], 75[2], 76, 137[2], 139, 169, 170, 171, 172[4], 177[2], 178, 197[3], 199, 217[2], 230[2], 285[2], 377[2], 409, 413[2], 421.
Hesse, 85, 255[2], 340.
Hodgkinson, 191, 193, 194[4].
Holmboe, 121, 134.
Hooke, 191, 193.
Humphrey, 211.

Jacobi, 65, 70, 72[2], 74, 85, 109, 143[3], 145, 177, 178[2], 199[4], 200[3], 204[2], 277[3], 279, 289, 319[3], 320[2], 322, 327[2], 329, 332, 364, 366, 388, 414.
Jerrard, 31, 171[2].
Joachimsthal, 332[2].
Jordan, 339.
Joubert, 1.

Kiepert, 29, 46, 51[2], 59, 78, 316.
Klein, 29, 31, 43[2], 46, 47, 264[2], 270[2], 275[3], 291[2], 294[2], 316, 357[3], 359, 360, 363, 367, 372[2], 375[2], 404, 413, 414.
Königsberger, 421.
Krause, 409, 421[2], 424, 427.
Kronecker, 25[2], 177, 178[3], 188, 217[4], 218[2], 413[2].
Kummer, 257[2], 278.

Lagrange, 85[4], 90, 100, 121[4], 122, 124[2], 125, 126, 127, 130, 319[2], 320, 321, 322, 330, 331, 332, 338.
Lamé, 189, 190.
Laplace, 121, 122, 125, 127.
Lebesgue, 109.
Legendre, 109, 143.
Leonardo da Vinci, 190.
Lesbros, 208, 211.
Liouville, 319[2], 320, 326.
Lombardini, 190, 211[2].

Maggi, 127[3], 163[3].
Mainardi, 109[2], 148[2], 149[2], 150[2], 153[3], 154[7], 157.
Malfatti, 217.
Mamiani, 207.
Mariotte, 191[2].
Maury, 191.
Michelotti, 208.
Mittag-Leffler, 377[2].
Monge, 121, 125.
Morin, 191, 194[3], 195.
Moseley, 191.
Mossotti, 125[2], 126[4], 128, 132, 133[2].

Ostrogradsky, 332, 338.

Navier, 193, 206.
Noether, 413[2].

Padula, 123, 131.
Parrochetti, 213.
Passerini, 207.
Picard, 377[2].
Piola, 99, 119[4], 120[2], 121, 125[2], 126, 127[2], 128[3], 130[2], 131[2], 132[5], 133[3], 134, 135[3].
Plana, 123[2], 124[2], 132.
Poisson, 99[2], 102[3], 107[3], 124, 130.
Poncelet, 208, 211, 213.
Possenti, 213.
Prony, 209, 211[2].
Puiseux, 330[2].
Raabe, 332[2].
Richelot, 320[2].

Roffiaen, 193.
Rosenhain, 143^3, 397.
Salmon, 1, 169^2, 340, 345.
San Martino, 124^2, 131^2.
Schläfli, 169^2, 170.
Schwarz, 65, 66, 76, 264^2, 270^2, 276, 357, 358, 372^2, 375.
Serret, 255, 319^2.
Svanberg, 128^2.
Sylvester, 137, 169^2, 170.

Tadini, 121, 123^4, 124^2, 125^3, 127, 131^2, 133^2, 134, 208.
Tardy, 41, 121^2, 122, 130, 133, 134^2.
Taylor, 124.
Tortolini, 41^2, 183, 217.
Tredgold, 191.
Tschirnhaus, 31, 171^2, 230^2.
Turazza, 125, 127^4, 128, 129, 130^2, 131^4, 134^2.

Venturoli, 121, 123^3, 124^3, 125^4, 126^2, 127^5, 128^2, 130^2, 131^2, 132, 133^5, 134^2.
Vickers, 192.

Webster, 124.
Wedekind, 264^2, 270.
Weierstrass, 303, 397.
Weisbach, 211.

Fine del Tomo Terzo.